UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Elaboración de un Aula virtual para la enseñanza de algunas funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, utilizando el LMS Moodle

José Oswaldo Urrego Garzón

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2015

Elaboración de un Aula virtual para la enseñanza de algunas funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, utilizando el LMS Moodle

José Oswaldo Urrego Garzón

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

M. Sc. En matemáticas

Martha Cecilia Moreno Penagos

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2015

A mis Padres

A mi esposa y a mi hija Mariana Sofía

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a la profesora Martha Cecilia Moreno Penagos quien me colaboró con la elaboración de este trabajo, con sus correcciones y sugerencias.
Al profesor Crescencio Huertas, por su ayuda en la elaboración de la encuesta inicial y al profesor Willington Gómez quien me asesoro con la plataforma Moodle de la institución.

Resumen

A los estudiantes de grado noveno del Colegio Distrital el Porvenir sede B jornada tarde, se les realizó una prueba diagnóstica, con el fin de identificar dificultades que tienen con algunas de las representaciones de las funciones, gráfica, tabular y expresión algebraica. Una vez analizados los resultados de la prueba diagnóstica, se procede a la elaboración de la propuesta didáctica, para contribuir a la comprensión de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, desde sus diferentes representaciones, aprovechando los recursos que brinda la tecnología.

Por medio de la construcción de un aula virtual en la plataforma Moodle, que reúne recursos didácticos, en donde el estudiante se siente motivado al poder utilizar diferentes herramientas que ofrecen las nuevas tecnologías como son, chats y foros para mantenerse en contacto con sus compañeros y docente, los simuladores, en los que al interactuar podrá observar, conjeturar y verificar mediante una serie de ejercicios teóricos y prácticos los cambios que tienen las funciones en sus representaciones, gráfica, tabular y expresión algebraica. Finalmente una evaluación en línea para medir su entendimiento, que dispondrá de un día para su realización sin la presión y los nervios que produce una presencial.

Palabras clave: función cuadrática y cubica, aula virtual, representación de funciones, variables.

Abstract

A diagnostic test was carried out with ninth grade students from Porvenir School branch B afternoon shift in order to identify the representations of functions, graph, table and algebraic expression. Once of having analyzed the results of the diagnostic test, the elaboration of the didactic proposal was developed to contribute to polynomial functions´ understanding in a lesser degree or equal three, from their different representations, taking advantage of the resources that technology provides.

By means of the construction of a virtual classroom in moodle platform which gathers didactic resources, the students feel motivated when being able to use different tools that offer the new technologies such as chats, forums to keep in touch with their classmates and professor, simulators which they can interact with, to observe, conjecture and verify through a serie of theoretical and practical exercises, the changes that functions have in regards to its representations, graph, table and algebraic expression. Finally, an on-line evaluation was implemented to gauge students' understanding which will be done in one day without the pressure and nervous that a face-to-face test can produce.

Key words: Quadratic function, Cubic function, virtual classroom, variables, function representation.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Las funciones polinómicas son importantes debido a su gran utilización en las diferentes ciencias como por ejemplo: en Física en las leyes del movimiento, en Biología para el estudio de los efectos nutricionales, en Ingeniería civil para diseño de puentes colgantes, y en general en cualquier disciplina donde se realicen experimentos en los que se recogen datos y se obtiene un conjunto de puntos para estudiar, es muy usual que estos se traten de ajustar a distintas funciones polinómicas usando las curvas de regresión.

Uno de los objetivos del curso de Álgebra trabajado en los grados octavo y noveno es justamente que el estudiante se familiarice, reconozca, manipule y pueda resolver problemas básicos relacionados con las funciones polinómicas, pero la experiencia personal y los estudios de varios didactas muestran que una de las dificultades que tienen los jóvenes cuando están en octavo grado, es el de encontrar las raíces de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, ya sea igualando a cero y factorizando la expresión o aplicando otro método de solución (gráfico o fórmulas). En noveno llegan con esta dificultad cuando empiezan a trabajar funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, siendo un obstáculo para su comprensión y posteriormente para su representación y aplicación.

Al iniciar el año lectivo, se aplicó a 50 estudiantes de grado noveno del Colegio Distrital El Porvenir sede B jornada de la tarde, una prueba o evaluación de diagnóstico con el fin de identificar fortalezas y /o debilidades en algunos tópicos relacionados con las funciones; en particular sobre diferentes representaciones de una función, los resultados mostraron la necesidad de plantear estrategias para superar las dificultades detectadas y lograr avanzar en el estudio de las funciones polinómicas.

Se presenta la propuesta didáctica para contribuir a la comprensión de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, desde sus diferentes representaciones, aprovechando los recursos que brinda la tecnología. Por medio de la construcción de un aula virtual en la plataforma Moodle, que reúne recursos didácticos en donde el estudiante podrá utilizar tutoriales, simuladores, programas en donde interactuará para observar con claridad las representaciones de las funciones y los cambios que se producen al pasar de una representación a otra, además herramientas que ofrece la plataforma como foros en los que puede compartir y comentar sus dificultades con los compañeros y chats para comunicarse con el docente; adicionalmente responder evaluaciones en línea para probar su entendimiento.

Para el planteamiento de las actividades consideré oportuno hacer una revisión bibliográfica de la evolución y desarrollo histórico de los temas relacionados con las funciones polinómicas; uno de los objetivos era identificar algunos de los obstáculos en la evolución de esta temática desde el punto de vista disciplinar, así como los que expertos en didáctica han reconocido como dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje , lo curioso es que hay intersección entre los dos tipos de dificultades, lo que de alguna manera muestra que, independientemente de la población y de la época, siempre han existido dificultades similares en el estudio de estas temáticas.

En el capítulo dos, se trabaja sobre algunos aspectos disciplinares relacionados con los polinomios, sus operaciones, algunos teoremas importantes que nos ayudan a encontrar las raíces de las ecuaciones polinómicas y se presentan las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, y la relación que existe entre la solución de ecuaciones polinómicas con el análisis y comportamiento de la función y su representación gráfica. Es de aclarar que para el curso no se considera el estudio de las funciones cúbicas, sino se proponen preguntas relacionadas con estas, con el fin de conocer si el estudiante está en capacidad de extender o generalizar ciertos procedimientos, después de haber visto las funciones lineal y cuadrática.

Se continúa con un estudio más detallado de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, en el que se analizan tres representaciones de las funciones: algebraica, visual y numérica. Para cada una de las funciones consideramos algunas aplicaciones familiares a los jóvenes, su representación y la variación de su representación de acuerdo a los cambios en los parámetros en cada una ellas.

En atención a uno de los propósitos del presente trabajo, hacer que el estudiante pueda superar las dificultades detectadas en la prueba diagnóstica, se trabajaron las representaciones de las funciones: lineales cuadráticas y algunas cubicas, en tabla, ecuación y gráfica, en donde el estudiante identifica la función como dependencia entre dos variables, sin importar cual sea su representación, pudiendo pasar de una representación a otra sin ninguna dificultad. Para lograr lo anterior, se contará con una serie de ejercicios de familias de funciones polinómicas de grado menor a igual a tres, realizando cambios en la relación algebraica, variando los parámetros y observando los cambios a nivel de la gráfica de la función.

Finalmente explicamos el procedimiento de la elaboración del aula virtual, comenzando con la prueba diagnóstica, su análisis y a partir de aquí se seleccionan las actividades que motiven al estudiante a entrar al aula para desarrollar las actividades propuestas.

Precisando que no se pretende remplazar las clases presenciales por el aula virtual, por el contrario, utilizarla como una herramienta para mejorar y complementar la práctica pedagógica en la enseñanza de la matemática, en la cual el estudiante podrá hacer uso del tiempo extra escolar para complementar el trabajo realizado en clase y así pueda tener una mejor asimilación de los conceptos. Convirtiéndose así, en una motivación más para el estudiante con el fin de facilitar el proceso de aprendizaje dentro y fuera del aula.

Esperamos que la actividad en el aula tenga un impacto positivo en los jóvenes de grado noveno, que sea una herramienta motivadora y que logre en el estudiante, el entender la relación existente entre las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres y su diario vivir. Como es algo nuevo en la institución despierta interés en los jóvenes, pero se requiere responsabilidad, trabajo y cumplimiento de parte de ellos en los horarios de las diferentes actividades, hábitos que no están muy presentes en nuestros estudiantes.

1. Los polinomios a través de la historia

En este capítulo realizaremos un breve recorrido por la historia, resaltando especialmente los episodios relacionados con las funciones polinómicas que tienen como antecesoras a las ecuaciones polinómicas, desde las civilizaciones mesopotámicas y egipcias, de donde se conocen las pruebas más antiguas encontradas en papiros y tablas cuneiformes, que han preservado parte de lo que fue el origen del trabajo con los polinomios y el nacimiento de las funciones, hasta finales del siglo XX en donde encontraremos las definiciones más usadas del concepto de función y los resultados más importantes relacionados con las funciones polinómicas.

1.1 La matemática del 2000 – 500 a.c

Para conocer el origen y la evolución de las funciones polinómicas, nos vemos obligados a remontarnos a la civilización egipcia, de donde provienen los documentos más antiguos que conocemos: los papiros, que contienen una serie de problemas que evidencian un alto nivel de conocimiento en algunos tópicos de la matemática. Uno de los más relevantes es el papiro Rhind, que se encuentra en el Museo Británico, en él se resuelven 87 problemas de diferentes temas de aritmética básica, ecuaciones, geometría y trigonometría; pero siguiendo con nuestro objetivo de estudio nos concentramos en tratar de analizar en qué grado esta civilización manejaba el concepto de función y particularmente el de función polinómica, por esta razón resaltamos del papiro Rhind inicialmente, dos tablas que se encuentran al comienzo de los problemas, son las tablas de descomposición de la fracción n/10 para n= 1, 2, ……., 9 (tabla 1.1) y otra en la que se muestran la descomposición como suma de fracciones unitarios de las fracciones de la forma 2/n con n impar, n=5,7,…………,101(tabla 1.2).

Tabla 1.1 n/10

1/10	1/10
2/10	1/5
3/10	1/5+1/10
4/10	1/3 + 1/15
5/10	1/2
6/10	1/2+1/10
7/10	2/3+1/30
8/10	2/3+1/10+1/30
9/10	2/3+1/5+1/30

Tabla 1-2 fracciones unitarias

n	**2/n**	**n**	**2/n**
5	3, 15	55	30, 330
7	4, 28	57	38, 114
9	6, 18	59	36, 236, 531
11	6, 66	61	40, 244, 488, 610
13	8, 52 , 104	63	42, 126
15	10, 30	65	39, 195
17	12, 51, 68	67	40, 335, 536
19	12, 76, 114	69	46, 138
21	14, 42	71	40, 568, 710
23	12, 276	73	60, 219, 292, 365
25	15, 75	75	50, 150
27	18, 54	77	44, 308
29	24, 58, 174, 232	79	60, 237, 316, 790
31	20, 124, 155	81	54, 162
33	22, 66	83	60, 332, 415, 498
35	30, 42	85	51, 255
37	24, 111, 296	87	58, 174
39	26, 78	89	60, 356, 534, 890
41	24, 246, 328	91	70, 130
43	42, 86, 129, 301	93	62, 186
45	30, 90	95	60, 380, 570
47	30, 141, 470	97	56, 679, 776
49	28, 196	99	66, 198
51	34, 102	101	101, 202, 303, 606
53	30, 318, 795		

Podemos observar que las tablas son evidencia de que los Egipcios manejaban, el concepto de relación entre dos conjuntos de números, en los dos casos nos relacionan números naturales con números racionales, estas descomposiciones posiblemente fueron motivadas por la manera (no simple) que tenían para dividir dos números enteros, utilizando sumas y duplicaciones, veamos por ejemplo, para dividir 840 entre 24 utilizando la duplicación

Tabla 1.3 división por duplicación

1	24
2	48
4	96
8	192
16	384
32	768
1+2+32 = **35**	24+48+768 = **840**

El problema surgió cuando las divisiones no eran exactas y hubo la necesidad de descomponer o representar de forma diferente las fracciones, para ello se utilizaron los valores de la tabla 1.2, en donde se expresaban solo con fracciones unitarias. Es claro que la finalidad de estas dos tablas era facilitar los cálculos, pero la correspondencia que hacen entre un natural y una fracción revela, así sea de forma intuitiva un manejo del concepto de relación.

Por otra parte varios de los problemas del papiro corresponden al planteamiento y solución de ecuaciones lineales, no con la simbología algebraica actual. Ellos conocían las ecuaciones lineales y podían solucionarlas utilizando el método de “posición falsa”, que consiste en calcular el valor de la incógnita a partir de uno estimado, veamos un ejemplo:
Si una cantidad (“aha”) más 1/9 de la misma da un total de 40. ¿Cuál es la cantidad?

La ecuación correspondiente en notación actual es: $X + X/9 = 40$, se estima como valor $X = 9$, que al sustituir da como resultado 10, que no es el valor deseado, pero se puede encontrar un valor n que multiplicado por 10 me de 40, es decir, $40/10=4$, entonces $10*4=40$ por lo que al valor $X = 9$ que es falso lo multiplicamos por 4 y obtenemos $X = 36$ que es la solución.
Podríamos aquí encontrar los orígenes de los polinomios de grado 1.

También existen evidencias de que esta cultura trabajó con sistemas de 2 ecuaciones con dos incógnitas, específicamente en el papiro de Berlín aparecen dos problemas uno de los cuales contiene una ecuación cuadrática en las dos variables. No se encuentra en lo que conocemos de los egipcios, algún indicio de la solución para ecuaciones cuadráticas, pero si de las ecuaciones de segundo grado en casos particulares como el problema de los cuadrados del papiro de Berlín “El área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de otros dos cuadrados más pequeños, el lado de uno de ellos es 1/2 + 1/4 del otro, averiguar los lados de los cuadrados.

$$X^2 + Y^2 = 100$$
$$(1/2 + 1/4)X = Y$$

y su solución utilizando la falsa posición: “ Supongamos que uno de los cuadrados tiene un lado de 1 codo. El lado del otro cuadrado tendrá por lo tanto 1/2 + 1/4 de codo. Las áreas serán de un cuadrado 1 codo cuadrado y del otro 1/4 + 1/16 de codo cuadrado, la suma de las áreas de los dos cuadrados será 1 + 1/2 + 1/16 codos cuadrados. La raíz cuadrada de esta suma es 1 + 1/4. Como la raíz cuadrada de 100 es 10, entonces dividimos (1 + 1/4) entre 10 obteniendo 8 por lo tanto un cuadrado es de lado X = 8 y el otro Y = 6 codos.
En otros problemas del papiro trabajan con repartos proporcionales, como es el problema 63, y del 69 al 78 que trabajan proporción inversa. Aunque no se trabaja el concepto de función como lo conocemos hoy en día se podría afirmar que *“Esto nos muestra la importancia en los cálculos de las fracciones de la unidad y a la vez nos enseña una primitiva e inocente idea de establecer una correspondencia entre dos conjuntos de números”* (Sanchez 2007 p. 19),

Después de unos comienzos prometedores de una matemática, en la civilización Egipcia, sufrió un estancamiento del que no pudo salir. Casi en la misma época, encontramos la civilización Mesopotámica que se ubicó a lo largo de los ríos Tigris y Éufrates. Esta región se vio sometida a invasiones frecuentemente, pero uno de los elementos que prevaleció fue la uniformidad cultural, en especial la escritura cuneiforme, la cual se realizaba con una varilla en tablillas de arcilla que se dejaban secar al sol o se cocían en hornos y finalmente se almacenaban.
Estas tablillas soportaron mejor el paso del tiempo y se conservaron en mayor cantidad que los papiros Egipcios, “*disponemos de una gran cantidad de documentación primaria relativa a la matemática Mesopotámica*” (Boyer 1986 p.50) en ellas podemos encontrar problemas relacionados con fracciones sexagesimales, operaciones fundamentales, algebraicos, áreas de polígonos y geometría, pero para nuestro propósito resaltamos la siguiente tablilla (tabla 1.4) que de nuevo muestra el concepto de relación entre elementos del conjunto de los naturales, pero que según Otto Neugebauer es posible que la tabla se haya usado para solucionar ecuaciones cúbicas mixtas de la forma

$$ax^3 + bx^2 = c$$

Tabla 1.4

n	n^3+n^2	n	n^3+n^2	n	n^3+n^2	n	n^3+n^2
1	2	**7**	392	**13**	2366	**19**	7220
2	12	**8**	576	**14**	2940	**20**	8400
3	36	**9**	810	**15**	3600	**30**	27900
4	80	**10**	1100	**16**	4352	**40**	65600
5	150	**11**	1452	**17**	5202	**50**	127500
6	252	**12**	1872	**18**	6156		

Veamos cómo se puede hacer uso de la tabla para resolver ecuaciones cúbicas de este tipo: $ax^3 + bx^2 = c$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por a^2/b^2 obtenemos

$$(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$$

Ahora sustituimos ax/b por y obtenemos

$$y^3 + y^2 = c^* a^2/b^3$$

Utilizando la tabla podemos resolver para y. La x la encontramos de y = ax/b.

Es de sorprendernos que los Babilonios pudieran solucionar ecuaciones cúbicas, ya que no poseían el simbolismo algebraico que tenemos hoy en día, sin el cual debieron realizar unos procesos muy dispendiosos.

Otro ejemplo de la destreza matemática que tuvieron los Babilonios lo encontramos en una tablilla, donde se relacionan cuatro columnas de números por quince filas (Tabla1.5). Gracias a Neugebauer y Sachs, quienes encontraron la clave para descifrar el contenido que correspondía a tríos pitagóricos, la columna de la derecha contienen la numeración del 1 al 15 y las otras columnas corresponden a las longitudes de los catetos (a y b) y la hipotenusa (c) de triángulos rectángulos.

Tabla 1.5

a	b	c		a	b	c	
120	119	169	**1**	600	481	769	**9**
3436	3367	4825	**2**	6480	4961	8161	**10**
4800	4601	6649	**3**	60	45	75	**11**
13500	12709	18541	**4**	2400	1679	2929	**12**
72	65	97	**5**	240	161	289	**13**
360	319	481	**6**	2700	1771	3229	**14**
2700	2291	3541	**7**	90	56	106	**15**
960	799	1249	**8**				

Según Neugebauer y Sachs se tendría por parte de los babilonios el conocimiento de las relaciones generadoras:

$$a = 2mn \qquad b = m^2 - n^2 \qquad c = m^2 + n^2$$

Donde m y n son enteros primos entre si, con m>n.

Para qué utilizaban esta tablilla no se sabe y el cómo los babilonios encontraron estos valores también es un misterio pero "*no es probable que los valores escritos en la tablilla se dedujeran utilizando métodos de ensayo y error, pues este procedimiento hubiera dado tríos más sencillos"* (Sanchez 2007 p. 22)

De acuerdo a lo anterior y observando otros problemas en las tablillas podemos darnos cuenta que hubo una utilización del teorema de Pitágoras en esta cultura, no se conoce una generalización, pero si varios problemas que por la precisión que ellos tienen, no se podrían llegar allí sin su uso. Boyer nos ilustra un ejemplo de un cuadrado con sus diagonales, en el que la relación de diagonal y lado es de $\sqrt{2}$. (Boyer 1986)

En consecuencia podemos reconocer que el avance en matemática de los Babilonios fue superior al de los Egipcios. A pesar de ello, no se encuentran evidencias que muestren el logro de pasar a la generalización de algunas reglas para la solución de problemas, pero al sugerir que no existieron, se tendría el inconveniente de explicar la cantidad de problemas análogos del mismo tipo solucionados.

Las dos culturas colocaron su granito de arena para el trabajo con algunas ecuaciones de grado menor o igual que tres, que es la evidencia del origen de las ecuaciones polinómicas para su posterior desarrollo y también contribuyeron a iniciar en forma incipiente con el concepto de relación entre elementos de dos conjuntos, lo que llevaría posteriormente a construir el concepto de función. Se evidencia la dependencia entre magnitudes las cuales fueron consignadas en tablas numéricas. También podemos encontrar palabras para representar magnitudes desconocidas, que muestran que había un grado de abstracción "*pero no se aisló ni la noción general de magnitud variable, ni de dependencia funcional, para lo cual fue necesario desarrollar ideas más claras sobre la representación tanto geométrica como algebraica de las relaciones entre magnitudes*" (Sanchez 2007 p.25)

1.2 La matemática del 500 a.c.-500 d.c.

Mientras en las civilizaciones anteriores la matemática iba entrando en una época de estancamiento, empezaba a surgir en otra región del mediterráneo la civilización Griega que, le daría un gran impulso al desarrollo matemático. Debemos destacar en sus comienzos a Tales de Mileto y a Pitágoras de Samos, quienes iniciaron el desarrollo de la matemática Griega.

De estos dos hombres no se conoce con certeza mucho de su obra, lo que ha llegado son referencias posteriores en escritos que hicieron alumnos de ellos, donde hablan del legado que dejaron. En el caso de Pitágoras es posible que trabajos que se le atribuyen a él, fueran de sus alumnos que le daban todo el crédito a su Maestro. Lo que si se conoce es que fueron viajeros, que recorrían las regiones aledañas, como Egipto y Mesopotamia, de donde trajeron los conocimientos matemáticos de estas culturas, mejorando lo que había y logrando generalizar algunas relaciones como el teorema de Pitágoras.

Los Griegos comenzaron a salir de esa matemática práctica, de resolver problemas de repartos proporcionales y de medición de terrenos, a una matemática más teórica en donde se lograba un mayor grado de abstracción lo que generaba el surgimiento de nuevos y grandes problemas. Uno de ellos fue el de medir la diagonal de un cuadrado de lado la unidad o medir el lado si la diagonal medía una unidad. Al conocer únicamente los números enteros y las fracciones, resultaba imposible su solución. Por lo tanto empezaron a considerar la geometría como una ciencia más completa que la aritmética y por ende, desarrollaron la geometría en forma independiente de la aritmética.

Esta separación hizo que en la geometría se privilegiara el uso de la regla y el compás, tanto que un problema se consideró resuelto correctamente, si únicamente se utilizaba regla y compás para encontrar su solución. Esta consideración genero grandes retos entre los más destacados los tres problemas clásicos de la antigüedad: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo; pero la imposibilidad de encontrar soluciones por este método (se supo que no tenían solución geométrica aproximadamente 2000 años después de propuestos) fue la razón para que se consideraran una gran cantidad de curvas, tratando de encontrar su solución.

Para encontrar curvas existían dos métodos, uno mecánico, que consistía en varios movimientos que formaban la curva, entre ellas encontramos la cuadratriz atribuida a Hipías de Elis en el siglo V a.C. El otro era secciones planas de sólidos conocidos, Menecmo de Atenas utilizó un cono recto intersecado por un plano, razón por la cual se le atribuye el descubrimiento de las secciones cónicas. Él encontró la curva, al intersecar un cono circular recto con un plano perpendicular a una de sus generatrices, que posteriormente Apolonio denomino parábola.

Menecmo para solucionar el problema de la duplicación del cubo, utilizó la intersección de dos de estas curvas, con vértices en común y ejes perpendiculares. Una con ecuación $x^2 = a\,y$, y la otra $y^2 = 2a\,x$. donde $l = a$ es el *latus rectum*[1]. Las coordenadas del punto de intersección de estas parábolas, tendrá como abscisa $x = a\sqrt[3]{2}$ que es la arista que duplica el volumen.

Por la misma época de Menecmo nos encontramos con el desarrollo de las lúnulas de Hipócrates al tratar de cuadrar el círculo. En otro problema plantea construir dos segmentos x y y dados dos segmentos a y b tal que se tenía la proporción media:

$$a/x = x/y = y/b$$

Hipócrates reconoció que si tomamos $b = 2a$, en esta proporción, eliminando la y por proporción continua, nos llevaría a $x^3 = 2a^3$ que es la duplicación del cubo. Además "*en la formulación de Hipócrates, la cuestión se había reducido a investigar la intersección de lugares geométricos correspondientes a las ecuaciones algebraicas*

---

[1] Cuerda que pasa a través del foco y perpendicular al eje mayor.

$x^2 = a\,y, \quad x\,y = a\,b, \quad y^2 = bx$” *(Sánchez 2007 p. 30)*

El trabajo con el cono lo continuo Apolonio de Perga, quien logra encontrar una propiedad en el plano que llamo *symptoma,* utilizando para ello un sistema de coordenadas oblicuo (diámetros conjugados). Muy similar al uso que tenemos hoy en día de un sistema de coordenadas pero lejos de utilizarlo como representación de una ecuación “*De la geometría Griega puede decirse que las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vengan determinadas por las ecuaciones”. (Boyer 1986 p. 207)* Apolonio encontró las relaciones de lo que hoy conocemos como las ecuaciones de las cónicas:

$$y^2 = lx - \frac{b^2 * x^2}{a^2}$$

$$y^2 = lx$$

$$y^2 = lx + \frac{b^2 * x^2}{a^2}$$

A pesar del gran avance que tuvo Apolonio, no se logra explorar todo el potencial que había con las dos técnicas de elaboración de curvas, que hasta ese momento se conocen, lo cual impide que se avance más, en ampliar el conocimiento de otras ecuaciones polinomicas, limitándolo principalmente al desarrollo de las cónicas, igual en el concepto de función, aun no se habla de variables, sino sólo de relaciones entre magnitudes.

Después de Apolonio, hubo varios matemáticos que continuaron con el desarrollo de la matemática Griega pero destacaremos el trabajo realizado por Diofanto conocido como el padre del Álgebra, comienza a dejar la retórica para empezar a trabajar un álgebra un poco más simbólica conocida como sincopada, como por ejemplo $4x^3 + 2x^2 - 3x - 8$ se representaría como C4S2Mx3u8, donde C,S,M,x,u representarían respectivamente, el cubo, el cuadrado, el menos, la incógnita y la unidad. La obra más conocida de Diofanto es “*La Aritmética*“ en trece volúmenes, pero conocidos realmente solo seis, en el libro I los problemas se reducen a ecuaciones determinadas del tipo $a\,x = b$ ó $ax2 = b$, con sólo una solución positiva. En los otros cinco libros, esencialmente aparecen ecuaciones algebraicas indeterminadas, denominadas hoy “Ecuaciones Diofánticas” que pueden tener infinitas soluciones pero para las cuales, sólo se consideran las soluciones enteras. Resaltamos nuevamente que, esta nueva evidencia muestra como se consideraron los polinomios desde la antigüedad.

1.3 La matemática del 500 d.c.-1500 d.c.

En esta época destacamos el trabajo de la cultura India y Árabe. En la cultura India sobresale el desarrollo en el trabajo de encontrar la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Particularmente resaltamos el trabajo de Brahmagupta, ya que en la solución de ecuaciones cuadráticas tiene en cuenta las dos raíces, la positiva y la negativa. Contribuyó también al trabajo de la solución general de la ecuación Diofántica lineal con soluciones enteras. Él encontró que para la ecuación $ax + by = c$, las soluciones tendrían la forma $x = p + mb,\ y = q - ma$ donde m es un entero arbitrario con a y b primos entre si. También se dedicó a la solución de ecuaciones cuadráticas indeterminadas de las formas $ax^2 + c = y^2,\ ax^2 - c = y^2,$ por ejemplo, él resuelve la ecuación $8x^2 + 1 = y^2$ obteniendo como soluciones (1,3), (6,17), (35,99), (204,577). Es interesante ver como utilizó una ecuación con la que encontraba las raíces cuadradas cuya solución no es un entero: *“restar el número cuadrado más cercano, dividir el resto dos veces por este cuadrado cercano, la mitad cuadrada de este es dividida por la suma de la raíz aproximada y la fracción, se resta la misma y esta nos dará la raíz correcta”*, en la notación actual esto sería:

$$\sqrt[2]{Q} = A + \left(\frac{b}{2A} - \left(\frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}\right)\right)$$

También nos encontramos con el matemático Indio Bhaskara, quien en su libro el “vijaganita”, escribe la solución de una ecuación cúbica:

De la siguiente manera:

$$x^3 + 27x = 9x^2 + 91$$

Rescribir la ecuación como:

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 64$$

de donde obtiene

$$(x - 3)^3 = 4^3$$

Toma la raíz cúbica a ambos miembros

$$x - 3 = 4$$

entonces

$$x = 7.$$

Aunque no escribe una solución general para ecuaciones cúbicas, nos ilustra como los Hindúes trabajaron la solución de una ecuación cúbica, de una manera retórica y en casos particulares, sin hacer uso de la geometría.

La cultura Árabe tiene como base para su desarrollo matemático a los griegos y a los Hindúes, de quienes rechazaron los números negativos, debido a que pensaban que la matemática debe ser útil y debe ayudar en la solución de problemas prácticos. Sin embargo, también encontramos rastros de una matemática deductiva y énfasis en geometría.

En la obra de Al-Khwarizmi "*Hisab al-jabr w'al-muqäbala*" considera seis tipos de ecuaciones cuadráticas:

1. Tesoro igual a raíces $x^2 = bx$
2. Tesoro igual a números $x^2 = c$
3. Raíces iguales a números $bx = c$
4. Tesoro y raíces igual a números $x^2 + bx = c$
5. Tesoro y números igual a raíces $x^2 + c = bx$
6. Raíces y número igual a tesoro $bx + c = x^2$

Al khwarizmi da la solución a cada una de estas clases de ecuaciones cuadráticas, de una manera retórica, y realiza unas demostraciones geométricas en las que explica paso a paso el procedimiento para encontrar la raíz, veamos un ejemplo:

Un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams, cuyo significado es: de qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces el total es treinta y nueve.

Procedimiento: divide en dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco. Multiplícalo por sí mismo, y resulta Veinticinco. A lo que le añades treinta y nueve, y será sesenta y cuatro. Cuya raíz extraes, que es ocho; de la que substraes la mitad de las raíces, que es cinco. Queda tres, que es la raíz del tesoro y el tesoro es nueve, que no es otra cosa que la solución de una ecuación cuadrática usando la completación de cuadrados, veamos con la notación simbólica:

$$x + 10\sqrt{x} = 39$$

$$x + 10\sqrt{x} + 25 = 39 + 25$$

$$\left(\sqrt{x} + 5\right)^2 = 64$$

$$\left(\sqrt{x} + 5\right) = 8$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9.$$

Pero los árabes no sólo se quedaron en la solución de ecuaciones cuadráticas, sino que también fueron un poco más allá. Al-Karkhi se le atribuye la primera solución numérica para ecuaciones de la forma $ax^{2n} + bx^n = c$. Omar Khayyam soluciona ecuaciones cúbicas utilizando complicadas construcciones con cónicas por ejemplo: “sea la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$; si sustituimos en ella x^2 por $2py$ obtenemos $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ que es la ecuación de una hipérbola, mientras que la ecuación $x^2 = 2py$ de la sustitución representa una parábola…, las abscisas de los puntos de intersección de las curvas (si los hay) serán las raíces de la ecuación cúbica dada”. (Boyer 1987 p.312).

También se dedicaron al trabajo de las funciones trigonométricas, en especial la del seno, pero no como función, sino como una relación, en la que se dedicaron a encontrar más valores y más precisos con las aproximaciones en sus cifras decimales que llegaron a ser de nueve sexagesimales correctas.
Sin embargo, ellos comenzaron a reducir el distanciamiento que existía entre matemática y geometría. Al trabajar las soluciones de ecuaciones cúbicas, no eran como los griegos, los cuales daban soluciones como segmentos, sino que la solución era un número concreto.

1.4 La matemática del 1300 d.c.-1650 d.c.

Ya hemos visto como ha evolucionado el trabajo con ecuaciones polinómicas y a través de diferentes civilizaciones, ahora consideramos el trabajo de los europeos en donde se evidenciará una evolución que revolucionará la Matemática y la Geometría. Basándose en el desarrollo matemático de épocas anteriores, la matemática en Europa tiene sus comienzos con la traducción de textos en árabe y griego, al latín y a otros idiomas, entre las más populares de la época están Los elementos de Euclides y el Algebra de Al-khwarismi, sin dejar de lado los trabajos de Aristóteles y Arquímedes.

Estas traducciones fueron difundidas y trabajadas en las nacientes universidades en donde se va a crear ese espíritu investigativo, que comenzará a dar un giro a la matemática. En el Merton College en Oxford trabajaron sobre el movimiento uniforme, encontrando la que conocemos como regla de Merton “*cuando la velocidad de un objeto crece por igual en intervalos de tiempo iguales desde cero hasta una velocidad v en un intervalo de tiempo t, entonces la distancia recorrida es igual a la mitad de la distancia recorrida por un objeto que se mueve con velocidad constante v en este intervalo de tiempo t.”(Sanchez 2007)*

Nicolás Oresme toma estas ideas y comenzará a hablar de dibujar la manera como varían los objetos en movimiento mostrándonos, lo que podríamos decir, una de las primeras representaciones graficas de una función, utilizando quizá, algo muy parecido a lo que conocemos como plano cartesiano. Él utilizó latitud y longitud para representar estas cordenadas.
Nicolás Oresme generaliza la teoría de las proporciones, estableciendo reglas para operar con exponentes $x^a * x^b = x^{a+b}$; $(x^m)^n = x^{mn}$, y da ejemplos concretos para cada una de estas reglas.

Hasta este momento, Oresme al igual que sus predecesores utilizaba una matemática retórica. Es con Nicolás Chuquet y su libro el *Triparty,* que posiblemente comienza un cambio en el Álgebra. Un libro que en sus tres partes trabaja aritmética y álgebra, a pesar de desarrollarla retóricamente, destacamos el hecho de retomar la sincopación que había hecho anteriormente Diofanto. En él aparecen en las operaciones los signos mas y menos representados por las letras $\bar{p}$ y $\bar{m}$ respectivamente que más adelante el Aleman Stifel populizará con los símbolos + y -, al usarlos como coeficientes en las ecuaciones cuadráticas. Más adelante, hay un cálculo de raíces cuadradas, como por ejemplo $\sqrt{16+\sqrt{230}}$, donde se representa de una forma sincopada como $R)^2$ 16 $\bar{p}$ $R)^2$ 230. En las ecuaciones, a parte de la denominación que ya no llamo “cosa” sino “premier”, utilizó un exponente asociado con los coeficientes de la ecuación para las incógnitas. Así en nuestra notación los monomios $4x^6, 2x^5, 12x^{-3}$ y 3, en el *Triparty* aparecen como 4^6, 2^5, 12^{3m} y 3^0.

Ya mencionamos que Stifel trabajó al igual que otros en las ecuaciones cuadráticas, pero dejando un vacío en lo que se refiere a ecuación cúbica. Tartaglia hacia 1541 consiguió resolver ecuaciones cúbicas, pero Cardano fue quien primero lo publicó, por esta razón se le conoce como Método de Cardano para la solución de ecuaciones cúbicas.

Tartaglia soluciona la ecuación $x^3 + px = q$, por medio de versos de la siguiente manera

Cuando esta el cubo con las cosas presos
Y se iguala a algún número discreto
Busca otros dos que difieran en eso

Después tu harás esto que te espeto
Que su producto siempre sea igual
Al tercio cubo de la cosa neto

Después el resultado general
De sus lados cúbicos bien restados
Te dará a ti la cosa principal

En nuestra notación tenemos que

$$x^3 + px = q$$

$$u - v = q$$

$$uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

Donde p y q son números conocidos. Luego podemos obtener que

$u = q + v$ de modo que

$$(q + v)v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Entonces $$v^2 + qv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Que es una ecuación cuadrática en *v* cuya solución positiva es:

$$v = -\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

pero $$u = v + q = q - \frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Finalmente la solución que da Tartaglia será:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano demuestra esta solución utilizando volúmenes de cubos y prismas rectangulares. También recurrió a ejemplos particulares para llegar a esta solución. Pero encontró dificultades cuando al resolver la ecuación daba la raíz cuadrada de un número negativo, para el cual Cardano sabía que no existía tal raíz, a las que llamo “sofisticas”, dejando la semilla para el desarrollo de los números complejos. “No parecía haber ninguna necesidad de animales tales como las raíces cuadradas de números negativos. Pero con la solución algebraica de la cúbica la situación cambió radicalmente. Siempre que las tres raíces de una ecuación cúbica sean reales y no nulas, la fórmula de Cardano-Tartaglia conduce inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos.” (Boyer 1987 p.367)

A partir de Cardano comienza a desarrollarse la Matemática en diferentes sitios de Europa, contando para ello con la impresión de obras matemáticas de épocas anteriores, incluso las más importantes de la antigüedad. Hasta este momento el Álgebra se seguía trabajando de manera retórica, y el proceso de simbolización iba abriéndose camino con la utilización de la sincopa. No se habían generalizado, ni las ecuaciones cuadráticas, ni las cúbicas, posiblemente por el hecho de que sólo se trabajo en encontrar la solución a partir de casos concretos y no en una generalidad para las ecuaciones de un mismo tipo.

Al respecto François Viète, realiza uno de los grandes avances, al diferenciar entre un parámetro y la idea de incógnita, que para él era una cantidad desconocida y la representaría por una vocal, mientras que para los números conocidos (parámetros) lo haría por medio de una consonante. Pero a pesar de este avance, continuo haciendo un álgebra de palabras y abreviaturas, por ejemplo para escribir A^3 lo hacía como A cubus, , para la segunda potencia utilizó *quadratus* y al igual para las operaciones básicas, para la igualdad utilizó la palabra *aequalis.*

En cuanto la ecuación cúbica, Viète a parte de la notación propone una nueva forma de solución, transforma la ecuación a la forma $x^3 + 3ax = b$ (notación actual), en una

cuadrática, que es más fácil de solucionar para y^3, utilizando para ello la sustitución $y^2 + xy = a$. Sin embargo, continuó existiendo el problema de las raíces negativas que no las tuvo en cuenta en la solución de las ecuaciones.
Parte del trabajo de Viète fue con el problema antiguo de la trisección del ángulo, que terminaba en una ecuación cúbica, y que lo condujo a obtener ecuaciones cúbicas trigonométricas. Él observo que, si en la ecuación $x^3 + 3px + q = 0$, realizamos la sustitución $mx = y$ obtenemos $y^3 + 3m^2py + m^3q = 0$, que al compararla con *$cos^3\theta$-3/4 cos θ-1/4 cos3 θ=0* se puede tener que si *y=cos θ; 3m2p=-3/4 y -1/4 cos3 θ=m^3q,* al ser p y q conocidos se puede calcular m y 3 θ, para finalmente encontrar x.

En esta época no sólo se avanzó en la solución de la ecuación cúbica, sino también en la notación algebraica, destacamos al respecto al matemático Stevin, quien podríamos decir que comenzó a trabajar con números encerrados en círculos, encima de los coeficientes, en lugar de representar las potencias de una incógnita. En lugar de q para cuadrados escribía 2, para cubos 3 y así para las demás potencias, Stevin escribía la expresión $6x^4+x^3+5x$ como:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{array}$$

El avance de Stevin no se quedo en notación para potencias enteras, sino que trabajó también con potencias fraccionarias en las que el numerador indicaba la raíz de la incógnita y el denominador la potencia a la que estaba elevada, por ejemplo $\sqrt[3]{x^5}$ en Stevin es $\frac{5}{3}$

$$1$$

Contemporáneo a Stevin nos encontramos con Galileo Galilei, que vino a revolucionar la Ciencia, conociéndose como el padre de la Ciencia moderna. En cuanto a la Matemática; Galileo influenciado por las ideas de Oresme, le da un nuevo punto de vista a la construcción de curvas: el cinemático, donde la curva es generada por la trayectoria que describe un punto móvil. "*Galileo sustituyó las vagas ideas con que especulaban los filósofos medievales por conceptos susceptibles de medición, y para estas medidas podían encontrarse relaciones matemáticas[…] la expresión de los fenómenos de la naturaleza mediante relaciones matemáticas expresadas por fórmulas*" (Sanchez 2007)

Entre estos fenómenos, investigó el de un cuerpo pesado que se mueve horizontalmente, con velocidad constante, sobre una superficie que al acabarse, el cuerpo comienza a caer naturalmente describiendo una parábola (si se desprecia la resistencia del aire). Galileo explica este fenómeno descomponiendo el movimiento en dos: uno horizontal con velocidad constante y otro vertical acelerado.

Ya finalizando esta época de avances matemáticos, nos encontramos con René Descartes, filosofo y matemático, da el gran salto en el álgebra, pasa de la retórica y la sincopa, a la simbología. Adopta algunas letras del abecedario como son las primeras para los parámetros y las últimas para las incógnitas, las cuales tendrán notación exponencial. Adicionalmente adopta los símbolos germánicos de + y - , completando así algunos de los elementos con los que se escribirán las expresiones algebraicas.

Pero no nos olvidemos de la parte geométrica, ya que se venía trabajando el cuadrado como área y el cubo como volumen, ahora Descartes, gracias a la introducción de los sistemas coordenados, consideró que podrían representar segmentos, que se podían multiplicar y obtener como resultado otro segmento. Descartes le dio una interpretación geométrica a las operaciones del Álgebra, incluida la solución de ecuaciones cuadráticas por medio de segmentos y circunferencia.

Pero Descartes no paró ahí, criticó que los antiguos no trabajaran curvas que fueran hechas con regla y compás, y elaboró varios instrumentos con los cuales pudo construir curvas más complicadas. Además, se abrió la posibilidad de estudiar todas las curvas que pudieran ser expresadas por ecuaciones algebraicas.

En cuanto a ecuaciones "*Descartes en su libro 3 de la géométrie, "se reduce prácticamente a un curso de teoría elemental de ecuaciones, en el que se explica cómo hallar las raíces racionales, si las hay, como rebajar el grado de la ecuación si se conoce una raíz, como incrementar o disminuir las raíces de una ecuación en una cantidad dada, […] y como hallar las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuarticas algebraicamente" (Boyer 1987 p 436).*

Al igual que Descartes, Fermat debido a su contacto con obras de Apolonio, trabaja sobre lugares geométricos encontrando en ellos una forma para solucionar ecuaciones de una manera gráfica. Él estudia los lugares geométricos sencillos, así demuestra que la ecuación lineal representa una línea recta, que las ecuaciones de la forma $xy + a^2 = bx + cy$ por traslación de ejes se reduce a ecuaciones de la forma $xy = k^2$; y que ecuaciones como $a^2 + x^2 = by$; $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$; $a^2 - x^2 = ky^2$; $a^2 + x^2 = ky^2$, con k positivo, que representan una parábola, una circunferencia, una elipse y una hipérbola, respectivamente. Para las otras ecuaciones de segundo grado, Fermat aplica una rotación de ejes para reducirlas a los casos anteriores.

Después de Fermat, vendrán muchos matemáticos que le darán un avance a la matemática llevándola hasta la que conocemos hoy en día. En cuanto a la ecuación cúbica, finalizamos su historia con las transformaciones de Tschirnhaus quien propuso para la forma general de ésta, la transformación de la forma $y = x^2 + ax + b,$ dejándola de la forma $y^3 = K$.

1.5 La matemática después de 1650 d.c.

Hasta este momento hemos recordado el desarrollo histórico que tuvo la ecuación cuadrática y cúbica, en cuanto a forma, y como se llegó a una generalización de su solución. Pero en este camino siempre hubo obstáculos que con el tiempo se fueron superando. Uno de estos obstáculos lo encontró Cardano cuando solucionando la ecuación $x^3 = 15x + 4$, obtuvo en una parte de la solución: $\sqrt[2]{-121}$, que era para la época un valor desconocido, pero que con Cardano se dejo la semilla que después con Descartes llamaría número imaginario.

Luego de la solución de Cardano-Tartaglia de la ecuación cúbica, se descubre la solución de la ecuación cuartica por parte de Ludovico Ferrari, secretario de Cardano. Esto impulsó a los matemáticos a trabajar en la generalización de ecuaciones polinómicas de grado mayor a cuatro, sin encontrar una regla general para su solución, pero realizando aportes al Álgebra.

Uno de estos aportes lo hizo Petrus Roth quien escribió (1608) que, una ecuación polinómica de grado n puede tener n soluciones, si sus coeficientes son reales. Para 1629 se publico un libro de Albert Girald en el que escribió que una ecuación de grado n tiene n soluciones. Pero no menciona que sean complejos es decir de la forma $a + bi$ con

a, b reales, siendo este hecho el problema que demoraría en la demostración del Teorema Fundamental del Álgebra (TFA).

En la búsqueda de la demostración del TFA, nos encontramos que Leibniz demostró la falsedad del teorema, asegurando que $x^4 + 1$ no podía escribirse como el producto de dos factores complejos, desconociendo que la parte imaginaria tiene dos raíces cuadradas complejas. A esta afirmación se le unió Nikolas Bernoulli, pero para el polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$.

Pero en 1746 aparece el primer intento para demostrar el TFA por parte del alemán D'Alembert en el que utilizó un teorema que para la época no había sido demostrado, considerada por lo tanto una demostración débil. Sin embargo, esta idea fue importante para continuar con la demostración del TFA.

Euler poco tiempo después logra demostrar que todo polinomio real de grado $n<7$ tiene n raíces complejas. Para 1749 intenta demostrar el TFA para polinomios reales, encontrando como contradictor a Lagrange, quien buscó todos los puntos débiles de la demostración de Euler, pero para ello tuvo que recurrir al hecho de que existían las raíces. Otros matemáticos que aportaron a la demostración del TFA, no pudieron demostrar la existencia de las raíces y tuvieron que suponer que si existían.

Gauss en 1799 propone su demostración del TFA, que hoy en día no es aceptada, pero en ella manifiesta que no se debe suponer la existencia de las raíces como sus antecesores y que la demostración debería ir en esos términos. Después encontramos la demostración que hace Argand basada en una idea de D'Alembert, en donde a la unidad imaginaria le da un giro de 90° en el plano, encontrando así lo que hoy conocemos como la representación geométrica de los números complejos. Luego "simplifica la idea usando un teorema general de la existencia de un mínimo de una función continua" (Vernon Arguedas).

Posteriormente Gauss hace otros intentos en demostrar el TFA, pero ahora para coeficientes complejos deduce el resultado a partir del resultado sobre polinomios reales. Por otro lado, en 1863 Weierstrass da la demostración que el único cuerpo algebraico que contiene a los números reales es el cuerpo de los números complejos. A partir de acá, se hacen válidas las demostraciones anteriores.

Como la demostración de Argant es un teorema no constructivo, en 1940 el matemático Hellmuth Kneser publicó la versión constructiva del teorema de Argant, la cual fue simplificada en 1981 por su hijo Martin.(Vernor Arguedas T. 2008).

2. Polinomios y funciones polinómicas

Ya hemos visto en el capítulo anterior, como se dio a través de los años, el estudio y desarrollo de las funciones y las ecuaciones polinómicas, empezando por su notación y luego los diferentes obstáculos antes de encontrar una regla general para la solución de las ecuaciones de grado menor o igual a cuatro. Con las ecuaciones polinómicas de grado mayor a cuatro, se demostraría que no tenían una regla general de solución. Finalmente nos encontramos con el Teorema Fundamental del Álgebra, que tuvo que esperar para su demostración.

El recorrido realizado nos permite entender las razones por la que el estudio y entendimiento de las funciones polinómicas no es sencillo, fueron varios siglos de trabajo en los que se consolido una teoría que hoy día nos simplifica el trabajo, a continuación se mostraran algunas definiciones, operaciones, propiedades, resultados importantes y aplicaciones que facilitan el estudio y aprendizaje de estas funciones.

2.1 Polinomios

Un polinomio es una expresión matemática que se construye por una o más variables indeterminadas, y constantes, a través de combinaciones lineales de potencias enteras positivas de la(s) variable(s). De aquí en adelante, se tomarán únicamente los polinomios con una variable. La forma general de expresar un polinomio de grado n en la variable x es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots . + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales que llamaremos coeficientes, n es un número entero no negativo y corresponde al grado del polinomio si $a_n \neq 0$ y x es la variable que toma valores en el conjunto de los números reales.

Ejemplo

1. $P(x) = 3x$ es de grado 1
2. $P(x) = -4x^8 + 8x^6 + 15x^3$ es de grado 8
3. $P(x) = 4$ es de grado 0
4. $P(x) = x^5 + x^2 + 2x$ es de grado 5

Los coeficientes son las constantes o los números que multiplican a la variable, así en los ejemplos anteriores tenemos que los coeficientes son:

1. 3, 0
2. -4, 0, 8, 0, 0, 15, 0, 0, 0.
3. 4
4. 1,0, 0, 1, 2, 0.

2.1.1 Operaciones con polinomios

2.1.1.1 Suma

Para sumar dos polinomios debemos agrupar los términos cuya variable tenga el mismo exponente (términos semejantes) y simplificar sus respectivos coeficientes, es decir si P(x) y Q(x) son dos polinomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Por ejemplo sumar los polinomios $P(x) = 3x^7 - 6x^5 + 8$ y $Q(x) = 4x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 10$.

$P(x) + Q(x) = 3x^7 - 6x^5 + 8 + 4x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 10 = (3+4)x^7 + 6x^6 + (-6+7)x^5 - 3x^4 + (8-10)$ y obtenemos:

$$P(x) + Q(x) = 7x^7 + 6x^6 + x^5 - 3x^4 - 2$$

2.1.1.2 Producto

El producto de dos polinomios lo realizamos aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma es decir: multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y reduciendo finalmente los términos semejantes; sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Entonces

$P(x)*\ Q(x)$=(a_n*b_n)x^{n+n}+(a_n*b_{n-1})x^{n-1+n}+...+(a_n*b_1)x^{n+1}+(a_n*b_0)x^n+(a_{n-1}*b_n)x^{n+n}+(a_{n-1}*b_{n-1})$x^{n-1+n-1}$ +….+(a_{n-1}* b_1)x^n+(a_{n-1}*b_0)x^{n-1}+…+ (a_1*b_n)x^{n+1}+(a_1*b_{n-1})x^{n-1+1} +….+(a_1*b_1)x^{1+1}+(a_1*b_0)x+ (a_0*b_n)x^n +(a_0*b_{n-1})x^{n-1}+….+(a_0*b_1)x+(a_0*b_0).

Ejemplo

Encontrar el producto de los polinomios $P(x)$ =5x^8-x^7 y $Q(x)$ =9x^4+2x^3+8

$P(x)*\ Q(x)$=(5x^8-x^7)*(9x^4+2x^3+8)=5$x^8$9x^4+5$x^8$2x^3+5$x^8$8- $x^7$9x^4- $x^7$2x^3-$x^7$8

=45x^{12}+10x^{11}+40x^8-63x^{11}-2x^9-8x^7=45x^{12}-53x^{11}-2x^9+40x^8-8x^7

2.1.1.3 División

Algoritmo de la división:

Sean los polinomios $f(x)$ y $p(x)$, con $p(x) \neq 0$, entonces existen los polinomios únicos $q(x)\ y\ r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

Donde

$q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo de la división $\frac{f(x)}{p(x)}$.

$r(x)$ es de grado menor que $p(x)$ o $r(x) = 0$.

La división de un polinomio entre un binomio de la forma $x - c$ se realiza utilizando la división sintética.

- **División sintética:**

Es una forma de simplificar la división de un polinomio de grado n entre un polinomio de la forma $x - c$. Sea el polinomio $P(x) =$ $a_n x^n$+$a_{n-1}x^{n-1}$+….+$a_1 x$+a_0 dividirlo entre $x - c$.

Se escriben todos los coeficientes del polinomio ordenado y la constante c de la siguiente manera:

$\begin{array}{ccccc|l} a_n & a_{n-1} & \ldots. & a_1 & a_0 & c. \\ \hline \end{array}$ Luego bajamos el coeficiente a_n, lo multiplicamos por c y el resultado lo escribimos debajo de a_{n-1} y sumamos, a este resultado lo multiplicamos por c y lo escribimos debajo de a_{n-1} sumamos y seguimos repitiendo este procedimiento obteniendo:

$$\begin{array}{cccccc|c} a_n & a_{n-1} & \dots & . & a_1 & a_0 & \\ & cb_{n-1} & & & cb_1 & cb_0 & c \\ \hline a_n & a_{n-1}+ca_n & \dots & & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 & \end{array}$$

Los resultados de las sumas, es decir los coeficientes del cociente (de grado n-1), los escribimos:

$b_{n-1}=a_n$

$b_{n-2}=cb_{n-1}+a_{n-1}$

.

.

.

$b_1=cb_2+a_2$

$b_0=cb_1+a_1$

$r = cb_0+a_0$, donde r es el residuo.

Luego el polinomio cociente será $b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+ \dots +b_1x+b_0$

Si c es una raíz el residuo será $r = 0$

Ejemplo: Dividir el polinomio $P(x) = 4x^3+2x^2-3x-4$ por el polinomio $x - 1$

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -3 & -4 & \\ & 4 & 6 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 6 & 3 & -1 & \end{array}$$

El polinomio cociente sería $4x^2+6x+3$ con un residuo $r = -1$.

2.1.2 Algunos teoremas de los polinomios

Un caso especial del algoritmo de la división, se presenta cuando a $f(x)$ lo dividimos entre $x - c$, donde c es un número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$ entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

Con $r(x) = 0$ y $q(x)$ es algún cociente. Pero si $x - c$ no es un factor tendremos que el grado de $r(x)$ es cero debido a que el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $x - c$, es decir $r(x)$ es un número d distinto de cero. Por lo tanto concluimos que para todo $x - c$

$$f(x) = (x - c)q(x) + d.$$

De aquí obtenemos el Teorema del Residuo y el Teorema del Factor.

- **Teorema del Residuo:**

Si d es el residuo de dividir un polinomio $f(x)$ por $(x-c)$, entonces $f(c)=d$.

Como:

$$f(x)=(x-c)q(x)+d$$

Consideramos $x=c$ obteniendo

$$f(c)=(c-c)q(x)+d$$

$$f(c)=(0)q(x)+d$$

Por lo tanto $\quad f(c)=d$

Ejemplo: El residuo de dividir el polinomio $p(x)$=-2x^3-10x^2+x-1 por $x+5$ es:

$$d=p(-5)=-2(-5)^3-10(-5)^3+\ (-5)-1=-2(-125)-10(25)-\ 5-1$$

$$=250-250-6$$

$d=p(-5)=-6$

Ya que $x+5=\ x-(-5)$ luego $c=-5$

- **Teorema del Factor:**

Si el residuo de dividir $p(x)$ por $x-c$ es cero, entonces $x-c$ es un factor de $p(x)$.

Ejemplo: Demostrar que el polinomio x^9-512 tiene como factor $x-2$

Por el teorema del residuo tenemos:

$p(2)$=2^9-512=512-512=0.

Como el residuo es cero entonces $x-2$ es un factor.

Definición: Raíces o ceros de un polinomio

Son los valores para los cuales el polinomio se anula, es decir, c es una raíz o un cero del polinomio $p(x)$.si $p(c)=0$.

Del Teorema del Factor tenemos que, si $x-c$ es un factor de $p(x)$, entonces $x=c$ es un cero del polinomio $p(x)$, ya que por el Teorema del Residuo se tiene que:

$$p(c)=0$$

Por lo tanto c se llama una raíz o un cero del polinomio.

- **Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)**

Todo polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{C} \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0$ tiene por lo menos una raíz o cero en $\mathbb{C}$.

Como consecuencia de este teorema se deduce que todo polinomio de grado n se puede escribir en la forma:

$$f(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad x_i \in \mathbb{C}$$

Donde los x_i no son necesariamente distintos.

Podría enunciarse también afirmando que todo polinomio de grado **n**, con coeficientes complejos tiene a lo más **n** raíces complejas.

Ejemplo: El polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ es de grado tres y tiene como raíces a: 1, -1, -2

$$x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x - (-1))(x - (-2)).$$

- **Teorema de los ceros complejos:**

Si existen los ceros complejos de un polinomio con coeficientes reales, entonces se presentan en pares conjugados.

Corolario:

Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales, tiene al menos una raíz real.

Ejemplo: encontrar las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 2$.

Al solucionar la ecuación aplicando el método de Cardano (descrito en el capitulo anterior) para la solución de ecuaciones cúbicas obtenemos las raíces:

$x_1 = 1$; $x_2 = -1 - i$; $x_3 = -1 + i$.

Por lo tanto se obtiene una raíz real y dos complejas. Pero observe que las complejas son conjugadas.

- **Teorema de las raíces racionales:**

Sea el polinomio de coeficientes enteros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con a_n y $a_0 \neq 0$, si $P(x)$ tiene raíces racionales, entonces son de la forma $\frac{p}{q}$ $con\ (p\ y\ q$ primos relativos) p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Ejemplo: Las posibles raíces o ceros racionales del polinomio

$p(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ son: ±1, ±2, ±3, $\pm1/2$, $\pm3/2$, ±6.
Utilizando la división sintética se comprueba que las raíces racionales son: 2, 3, -1/2 por lo que: $p(x)=2x^3-9x^2+7x+6=(x-2)(x-3)(x+1/2)$.

2.2 Función Polinómica

2.2.1 Definición de Función

"Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X, uno y sólo un objeto en Y"(Apostol 1984 p.62). Se define el dominio de la función, como todos los elementos del conjunto X, y el rango de la función como los elementos de Y que son asociados a los elementos X.

Para designar una función se utilizan algunas letras del alfabeto como: *f, g ó h*. Si a los elementos del dominio los denotamos por x y son números reales entonces decimos que la función es real y depende de x y los elementos del rango los escribiremos como $f(x)$, que se lee f de x.

2.2.2 Clases de Funciones

- Algebraicas
  - ✓ Polinómicas: aquellas cuya expresión es un polinomio de la forma $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$,entre ellas encontramos las constantes, lineales, cuadráticas y cúbicas.
  - ✓ Racionales: son funciones de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $q(x)\neq 0$, como por ejemplo$f(x)=\frac{x+5}{x-7}$.
  - ✓ Radicales: Son aquellas en las que la variable se encuentra dentro del signo radical $f(x)=\sqrt{x^3-7x}$
  - ✓ A Trozos: Están definidas por intervalos con funciones diferentes.

$$f(x) = \begin{cases} x-5, si\ x \le 2 \\ 6, \quad\quad si\ x > 2 \end{cases}$$

- Trascendentes
  - ✓ Las exponenciales de la forma $f(x) = ka^{\,x}$ donde $a, k \in \mathrm{R}$ y $a > 0$
  - ✓ Las logarítmicas de la forma $f(x) = \log_a x$, $a > 0$
  - ✓ Las trigonométricas , por ejemplo: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $\mathrm{h(x)} = \tan x$

2.2.3 Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas definidas por un polinomio de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots . + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1,} \dots \dots ., a_1, a_0$ son números reales, a_n se llama coeficiente principal, a_0 termino independiente y *n* es un número entero no negativo que indica el grado del polinomio.

Si n=0 $f(x) = a_0$ función constante

Si n=1 $f(x) = a_1 x + a_0, \quad a_1 \neq 0$ función lineal

Si n=2 $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,, \quad a_2 \neq 0$ función cuadrática.

Si n=3 $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,, \quad a_3 \neq 0$ función cúbica.

2.2.4 Propiedades de las funciones polinómicas

Algunas de las propiedades de las funciones polinómicas son:

1. **Dominio**: el conjunto los números Reales.
2. **Rango**: depende de n, si n es impar el rango es el conjunto de todos los números reales, pero si n es par es un subconjunto propio de los Reales
3. **Continuidad:**

   Las funciones polinómicas son continuas para todo $x \in R$

   Demostraremos esta proposición:

Sea la función $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots . + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$,

Probaremos que es continua para todo $c \in R$; equivalente a mostrar que

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Aplicando algunas propiedades de los límites obtenemos:

$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots . + a_1 x + a_0)$

$= \lim_{x\to c} a_n x^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots . + \lim_{x\to c} a_1 x + \lim_{x\to c} a_0$

$= a_n \lim_{x\to c} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to c} x^{n-1} + \cdots . + a_1 \lim_{x\to c} x + a_0 \lim_{x\to c} 1$

$= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots . + a_1 c + a_0$

$= f(c)$

4. **Comportamiento en el infinito:** una característica especial de las funciones polinómicas $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots . + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$ es el hecho de para valores grandes positivos de la variable x o para valores negativos con gran valor numérico, $f(x)$ se comporta de un modo semejante a su primer término: $a_n x^n$.

   Esta consideración nos permite analizar el comportamiento de las funciones a partir del exponente *n* así:

   Si n es par tenemos dos opciones:

   - $a_n > 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to \infty$, luego para valores grandes de x la curva estará en los cuadrantes uno y dos

     Ejemplo

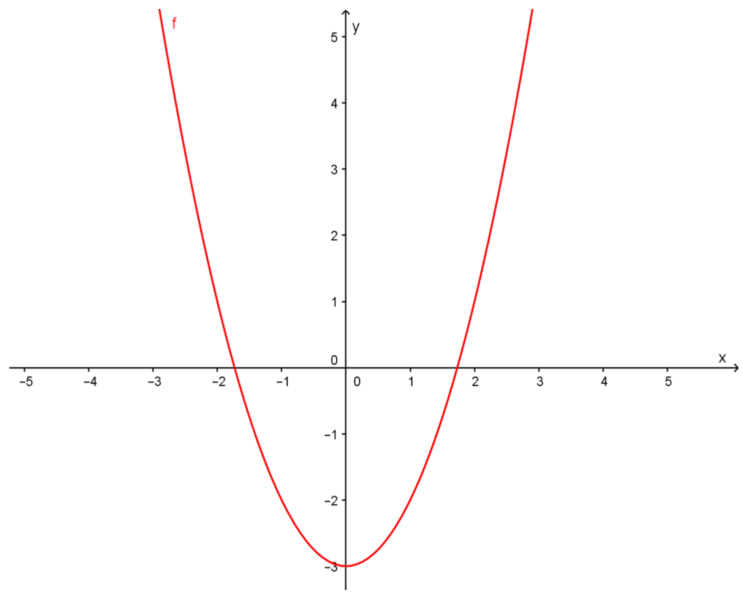


Fig. 2.1 $f(x) = x^2 - 3$

- $a_n < 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to -\infty$, luego para valores grandes de x la curva estará en los cuadrantes tres y cuatro ver figura 2.2.

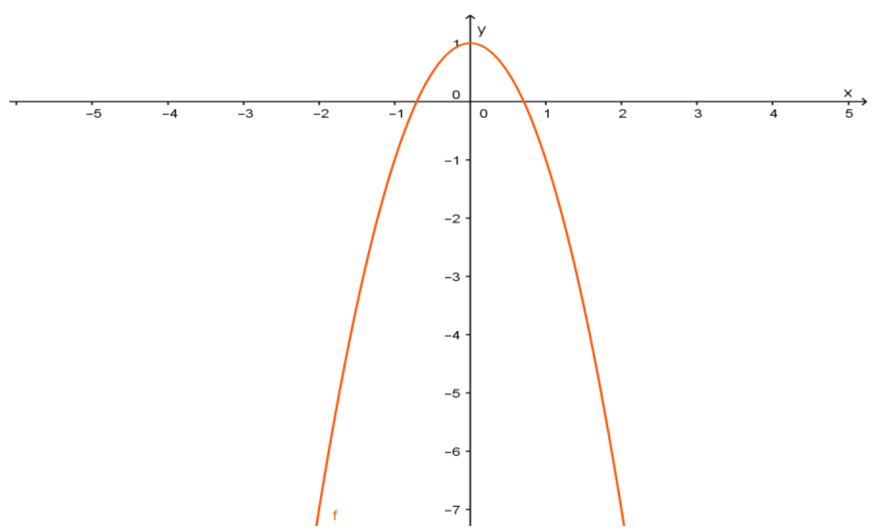


Fig. 2.2 $f(x) = -2x^2 + 1$

Si n es impar tenemos dos opciones:

- $a_n > 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to -\infty$, luego para valores grandes de x la curva estará en los cuadrantes uno y tres

  Ejemplo:

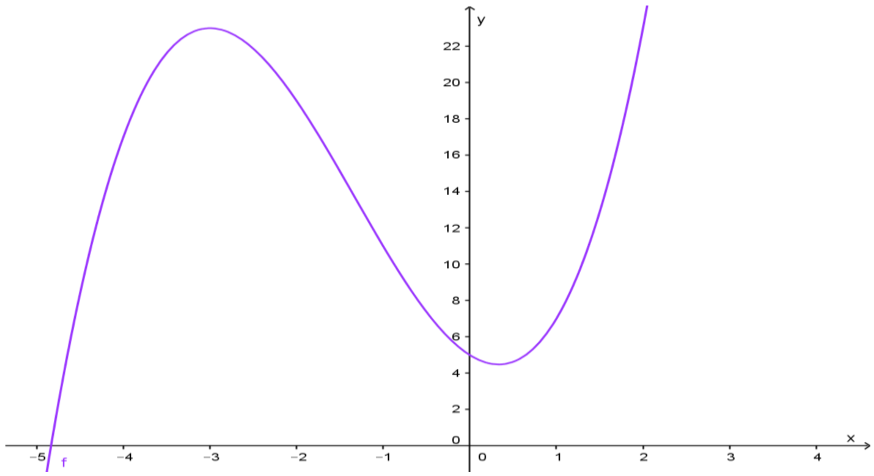


Fig.2.3 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$

- $a_n < 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \to \infty$, luego para valores grandes de x la curva estará en los cuadrantes dos y cuatro

  Ejemplo:

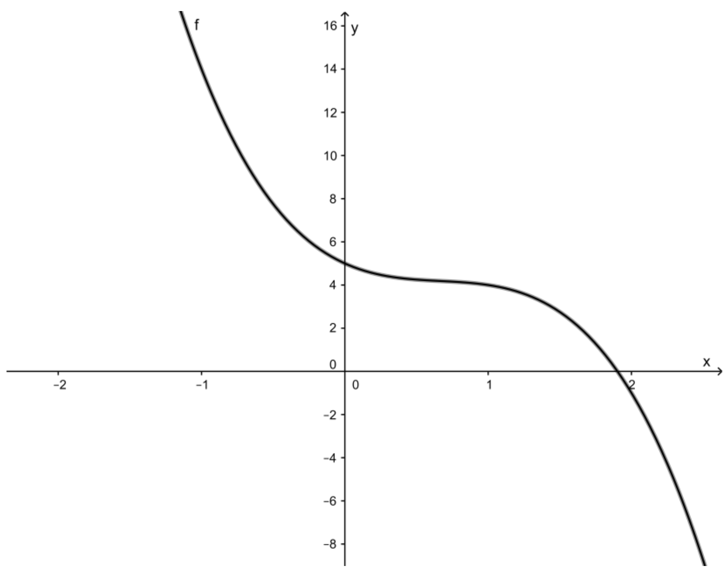


Fig.2.4 $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$

Nota: con esta observación y la propiedad anterior podemos afirmar que las funciones polinómicas de grado impar tienen como rango el conjunto de todos los números reales.

5. **Interceptos con los ejes:**

Eje x: corresponderán a las raíces reales de la ecuación polinómica asociada a la función y el problema se reduce a determinarlas. Como consecuencia del TFA se tendrá como máximo n raíces (incluyendo reales y complejas) por lo que la gráfica cruzará al eje x máximo n veces.

Observemos las siguientes gráficas de funciones polinómicas

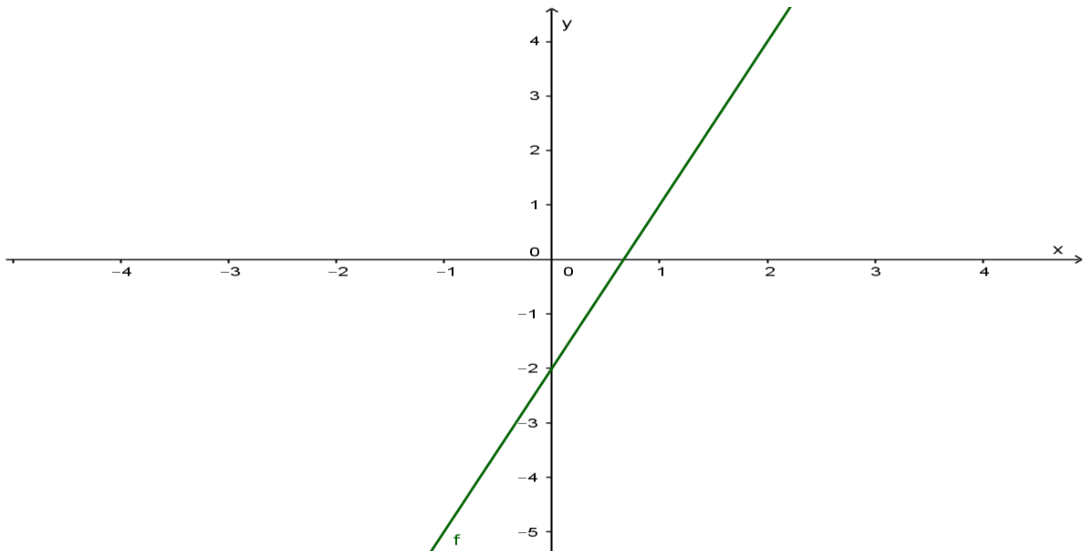


Fig. 2.5 $f(x) = 3x - 2$

Grado 1 y un corte con el eje x.

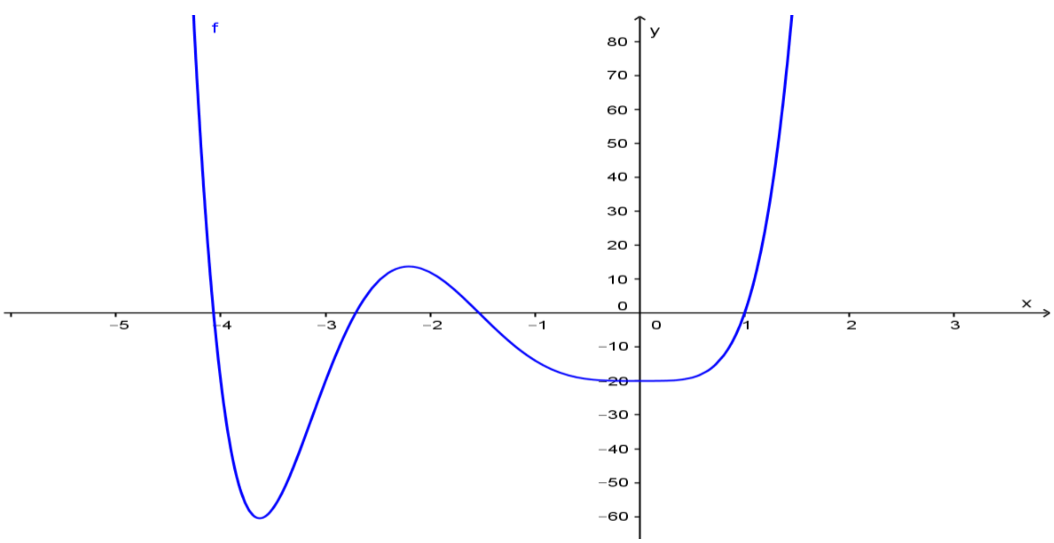


Fig. 2.6 $f(x) = x^6 + 7x^5 + 12x^4 - 20$

Grado 6 y 4 cortes con el eje x

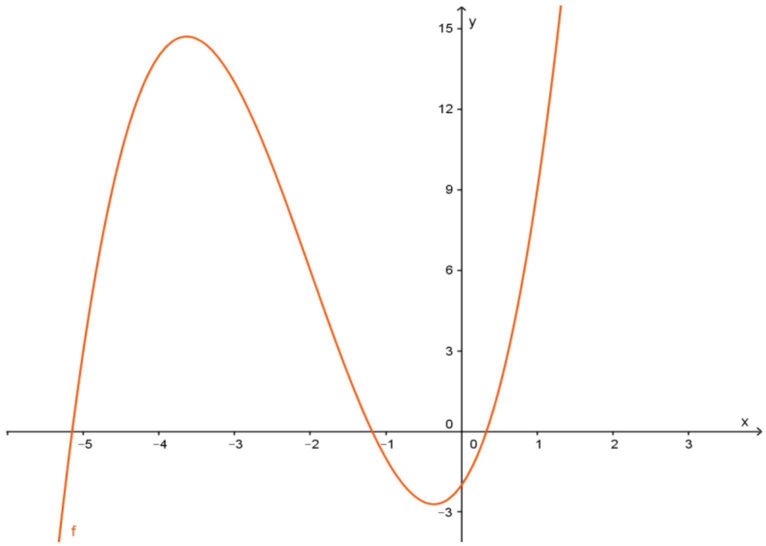


Fig. 2.7 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 2$

Grado 3 y 3 cortes con el eje x.

Ahora bien, para resolver las ecuaciones polinómicas de grado n, son de utilidad el algoritmo de la división y los teoremas estudiados en la sección 2.1.2.

Eje Y: en todas las funciones polinómicas en la variable x, sólo se tendrá un corte con el eje correspondiente a la imagen de cero a través de la función es decir será $f(0) = a_0$ que es el punto $(0,a_0)$.

6. **Máximos y/o mínimos:**

La cantidad de máximos y/o mínimos relativos de la función polinómica de grado *n* es a lo más *n-1*. Veamos la razón:

Consideremos la función polinómica:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots. + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Se dice x_i es un punto crítico de la función *f* si la recta tangente a la curva en $(x_i, f(x_i))$ es paralela al eje x, equivalente a decir que la pendiente de la recta tangente a la curva en x_i es cero y por lo tanto a que $f'(x_i)=0$, por lo que el número de puntos críticos de la función corresponderá a las soluciones de la ecuación polinómica de grado *n-1:*

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots. + 2a_2 x + a_1 = 0$$

Por el Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) el número de raíces de la ecuación es a lo sumo n-1. Por lo tanto los puntos críticos son a lo más n-1, los cuales pueden ser máximos o mínimos y algunos de ellos puntos de inflexión.

7. **Puntos de inflexión:**

   La función polinómica de grado n tiene a lo más n-2 puntos de inflexión.

   Un punto de inflexión es un punto donde la curva cambia de concavidad, en dichos puntos la recta tangente “atraviesa” la curva, una característica de estos puntos es que en ellos la segunda derivada es cero, luego para determinar los posibles puntos de inflexión debemos resolver la ecuación de grado n-2

   $$f''^{(x)} = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + (n-2)b_{n-2}x^{n-3} + \cdots . + b_2x + b_1 = 0,$$

   Por el TFA se tendrá máximo n-2 raíces, es decir máximo n-2 posibles puntos de inflexión.

Las características presentadas serán ahora analizadas en las funciones polinómicas de grado 1, 2, y 3.

2.3 Función polinómica de grado 1

Esta función es conocida como función lineal, su representación gráfica corresponde a una recta:

$$f(x) = a_1x + a_0$$

Donde a_1 y a_0 son constantes reales y a_1 representa la pendiente de la recta y a_0 es la ordenada del punto de corte con el eje y.

Es usual denotar la pendiente por *m* y la ordenada del intercepto por b, es decir escribirla como:

$$f(x) = mx + b$$

Se pueden diferenciar dos casos de esta función:

- Si b=0, denominada función lineal $f(x) = mx$, su grafica se caracteriza por que pasa por el origen de coordenadas.

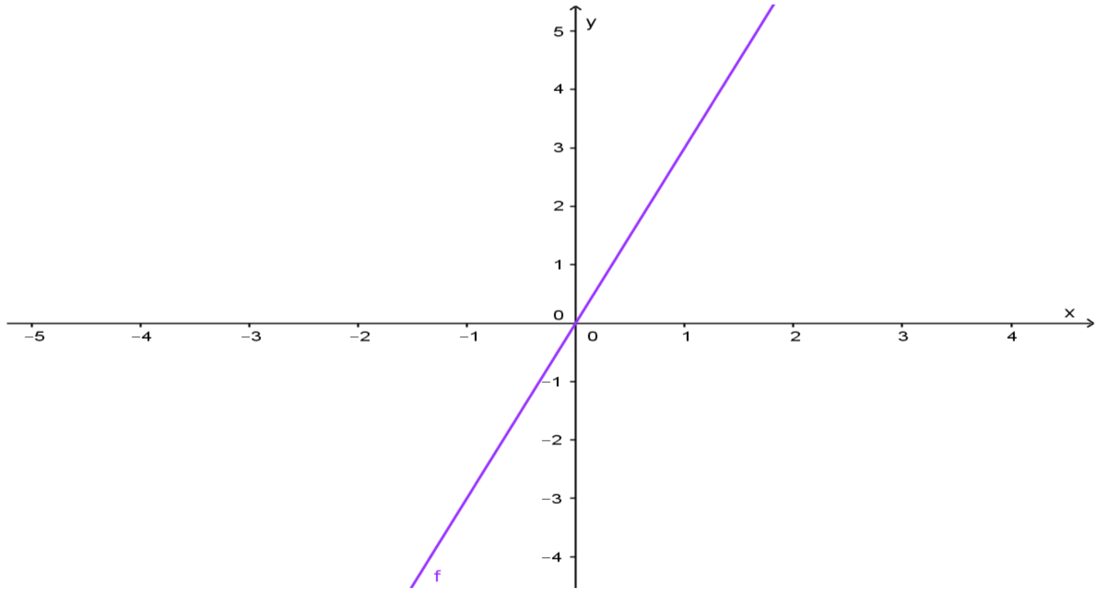


Fig.2.8 función lineal f(x)=3x

- Si b≠0 que se denomina función lineal afín, y corta al eje de las ordenadas en el punto (0,b).

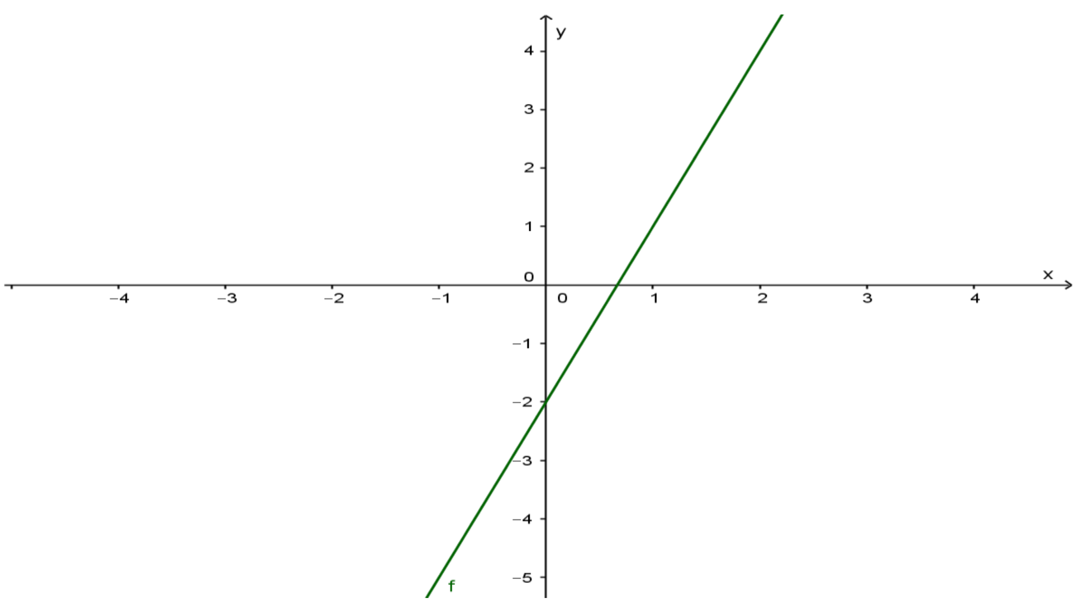


Fig.2.9 función afín f(x)= 3x-2

En general este tipo de funciones tiene una característica especial que depende de la pendiente:

Si m<0, la función es decreciente y si m>0 la función es creciente, lo cual se ilustra en la figura (2.10)

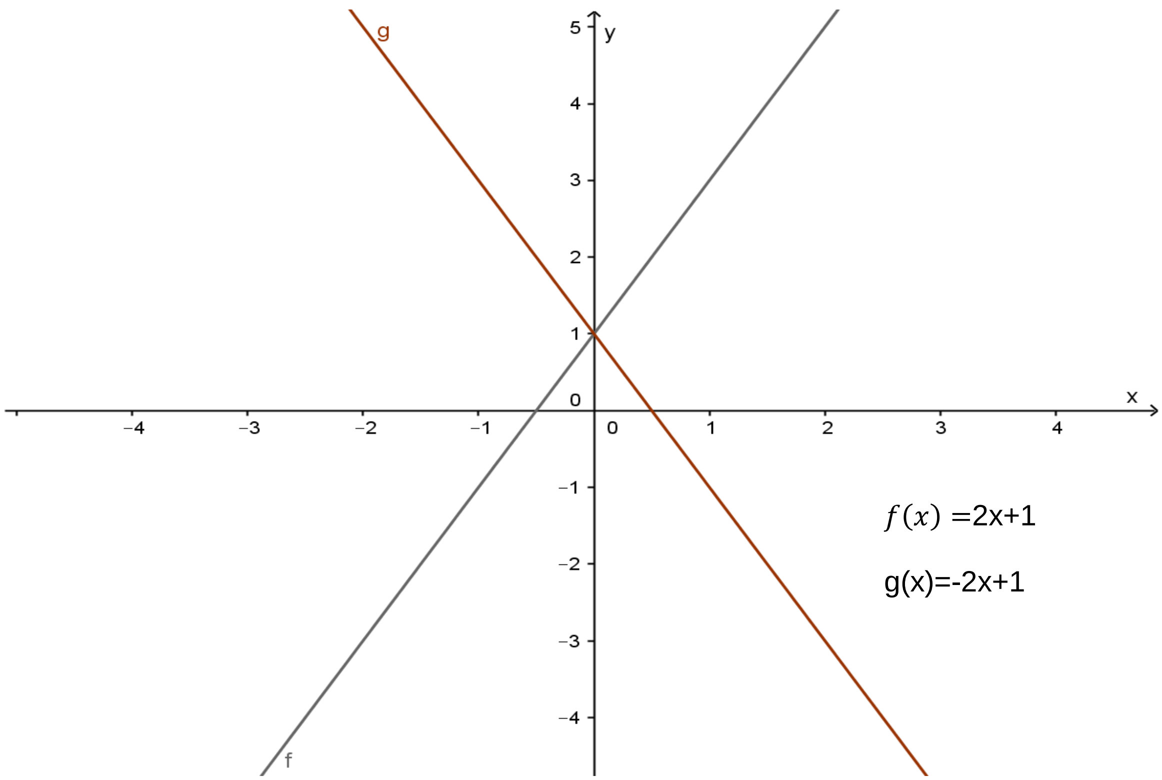


Fig 2.10

En el caso particular en que $m = 1$, se obtiene la función $f(x) = x$, conocida como **función identidad** ver figura (2.11) recta azul. La recta forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje x.

Si $m = 0$ se obtiene $f(x) = b$, función constante cuya gráfica es una recta paralela al eje x que pasa por el punto (0,b)ver figura (2.11).

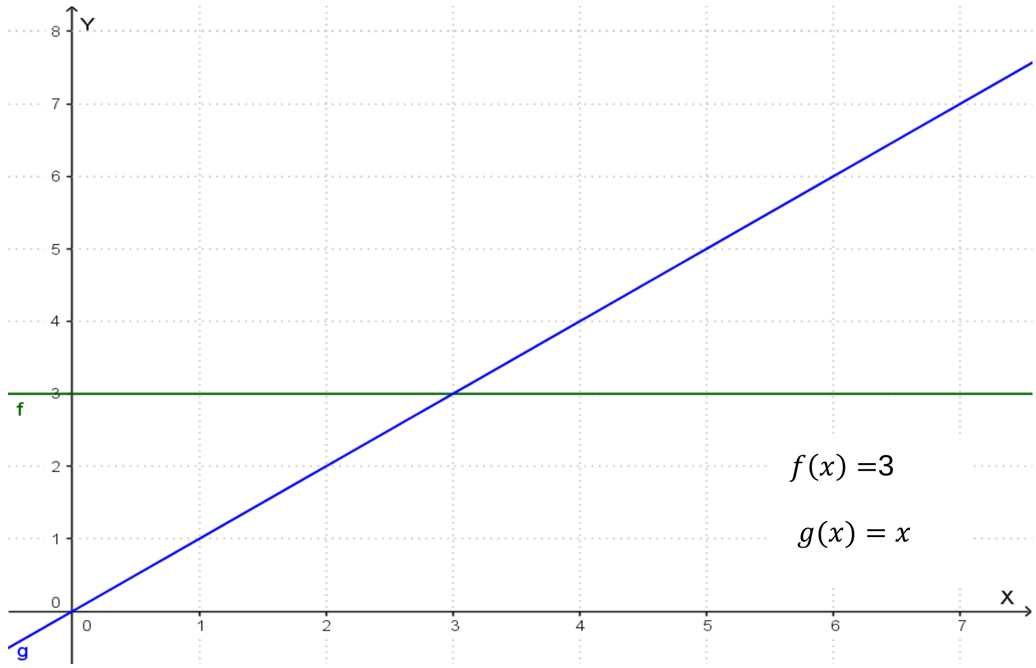


Fig.2.11

2.3.1 Aplicaciones

La función lineal $f(x) = mx$ aparece siempre que se relacionen dos magnitudes directamente proporcionales, es decir aquellas que se caracterizan porque si una de ellas aumenta la otra también lo hace en forma proporcional (a una razón constante).

La constante de proporcionalidad resulta ser la pendiente de la recta.

Ejemplo 1.

- En un restaurante se asa 125 gr de carne para cada plato, ¿cuántos gr de carne se debe asar, si en el almuerzo se sirven 65 platos?

Lo primero que hacemos es modelar una función con los datos suministrados. Para ello denotamos por $f(x)$ la cantidad de carne de x platos. Como la cantidad de carne aumenta a razón de 125 gr por plato, entonces para x platos:

$$f(x) = 125x$$

y como se sirven 65 platos, es decir, $x = 65$ entonces

$$f(65) = 125 * 65 = 8125\ gr$$

Se necesitan 8125 gr de carne para el almuerzo.

Otra forma que tiene la función lineal es $f(x) = mx + b$, cuando se tiene una condición inicial.

Ejemplo 2:

Una empresa de telefonía móvil, comienza operaciones con 8500 usuarios, los cuales aumentan a razón de 3200 por año. Encontrar una función que represente el número de usuarios al transcurrir x años.

Se da una condición inicial en el problema: inicialmente se tienen 8500 usuarios. (es decir en año cero 8500 usuarios) que corresponde al valor de *b* y como por año se incrementa en 3200 personas, esta es la constante *m* de la función, si $f(x)$ representa la cantidad de usuarios a los x años se tiene que:

$$f(x) = 8500 + 3200x.$$

Ejemplo 3:

Un auto A en el instante $t = 0\ h$, se encuentra a una distancia de 5 Km de un auto B. Si en ese momento los autos viajan con velocidades constantes de 60km/h y 80km/h respectivamente, ¿Qué tiempo habrá transcurrido cuando los dos autos se encuentren?

Denotemos por $f(t)$ la posición en el instante t del auto A y por $g(t)$ la posición del auto B en el instante t, luego $f(0) = 5$ y $g(0) = 0$ como la posición del auto B entonces se tendrán las funciones de posición de los dos autos:

Para A $\quad f(t) = 60t + 5$

Para B $\quad g(t) = 80t$

Para determinar el tiempo transcurrido en que los dos autos se encuentren, es necesario determinar t para que $f(t) = g(t)$ es decir:

$$80t = 60t + 5$$

Luego $\quad 80t - 60t = 5$

Entonces $\quad 20t = 5$

Por lo tanto se encuentran a $t = 1/4\ h = 15$ *min, .*cuando se han recorrido 20 Km

Geométricamente la solución se puede interpretar como el punto donde se cortan las dos rectas.

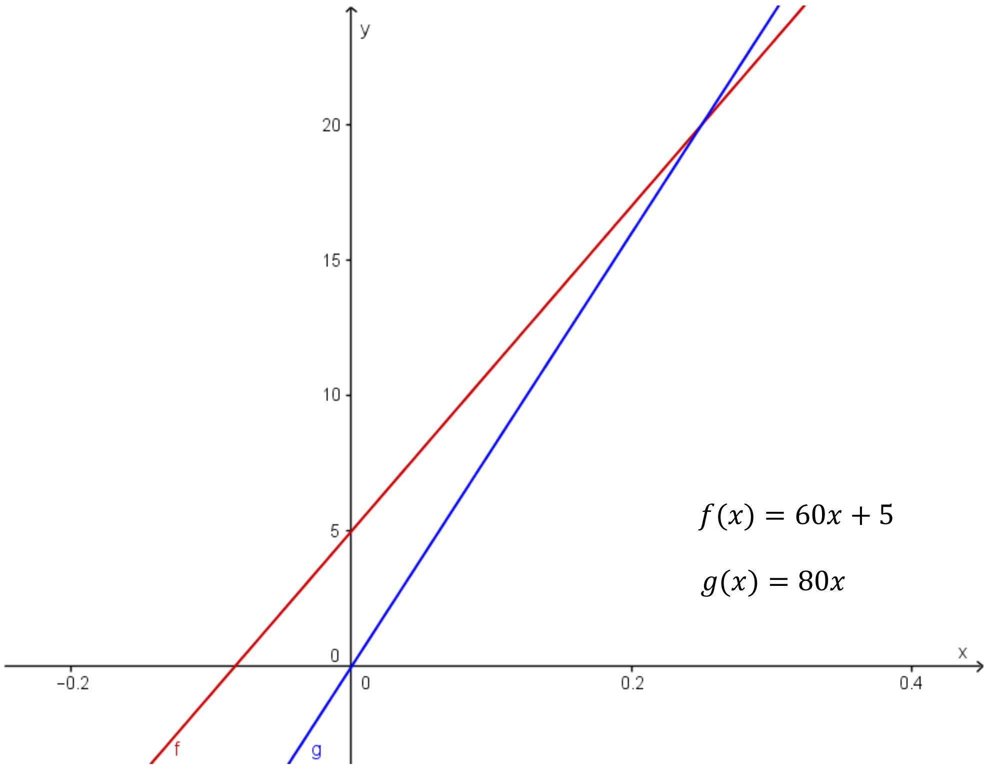


Fig. 2.12

2.4 Función polinómica de grado 2

Son todas aquellas funciones reales que tienen la forma:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Donde a_2, a_1 y a_0 son números reales con $a_2 \neq 0$. a_0 es la ordenada del punto de corte con el eje y, usualmente se representa por *c*, mientras que el coeficiente del término lineal a_1 se representa por *b* y el coeficiente del término cuadrático a_2 por a.

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La representación gráfica de estas funciones corresponde a una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo del valor de a. En la figura 2.13 se grafican algunas de estas funciones.

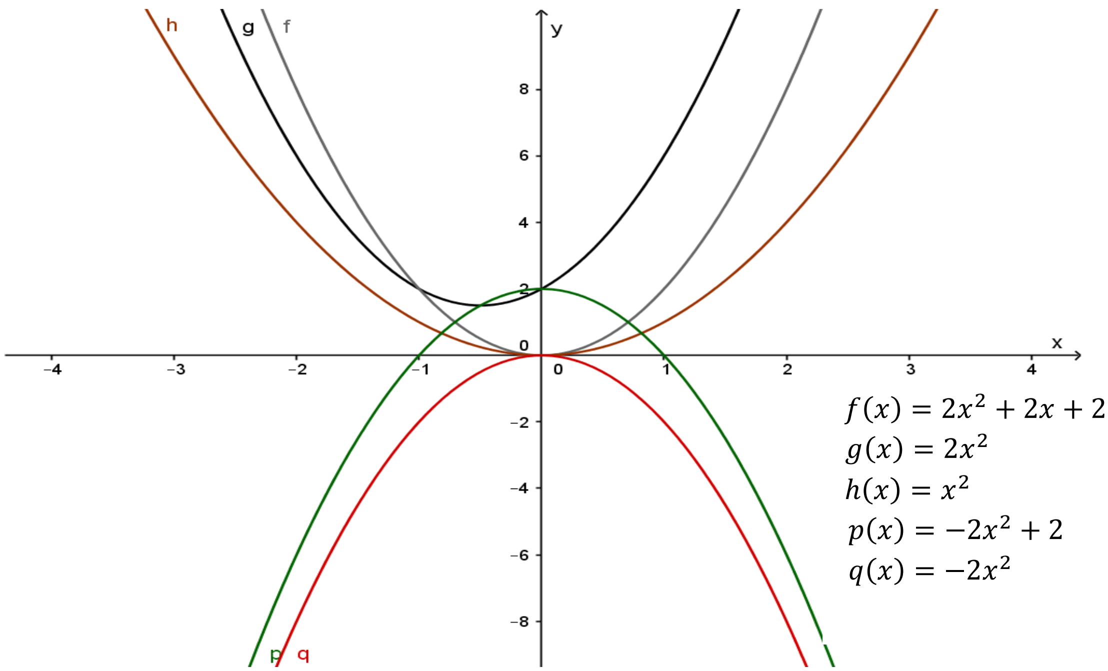


Fig. 2.13

Las parábolas tienen un eje de simetría, es decir, una recta vertical que pasa por el vértice (punto más bajo si la parábola abre hacia arriba, y punto más alto si la parábola abre hacia abajo) de la parábola y que la divide en dos partes simétricas. Analizando el parámetro a de la función, observamos que si a<0 la parábola abre hacia abajo y si a>0 abre hacia arriba por lo tanto el vértice será el punto máximo de la gráfica en el primer caso y en el segundo corresponderá al mínimo.

Para hallar el vértice, se completan cuadrados, para luego factorizar:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x - \frac{-b}{2a})^2$$

$$y - f(\frac{-b}{2a}) = a(x - \frac{-b}{2a})^2$$

Para obtener que $x = \frac{-b}{2a}$ es la coordenada X del vértice. Y $f(\frac{-b}{2a})$ la coordenada Y del vértice.

Para hallar los puntos de corte con el eje x debemos hacer que $f(x) = 0$ es decir solucionar la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

De donde: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

El término $b^2 - 4ac$ se llama el **discriminante** y determina la naturaleza de las raíces de la ecuación asi:

- Si $b^2 - 4ac$<0 tiene dos raíces complejas conjugadas
- Si $b^2 - 4ac$=0 tiene una única solución real (raíz doble)
- Si $b^2 - 4ac$>0 tiene dos raíces reales.

Si se conocen las raíces digamos x_0 y x_1 la función se puede escribir como un producto:

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$$

Si $x_0 = x_1$ entonces $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Ejemplo

Analicemos la función $f(x) = -x^2 + x + 2$

Como $a = -1$<0, entonces la parábola abre hacia abajo

Coordenadas del vértice(1/2,9/4), corresponde al punto máximo.

Discriminante: $b^2 - 4ac$ = 9 >0 por lo tanto tiene dos raíces reales

Para hallar las raíces se soluciona la ecuación $-x^2 + x + 2 = 0$ obteniendo:

$$x_0 = 2, \qquad x_1 = -1$$

Escribiendo la función como producto de sus raíces $f(x) = (-x + 2)(x + 1)$ de

donde se obtiene que los puntos de corte con el eje X son (2,0) y (-1,0).

El punto de corte con el eje Y es (0,2).

Veamos la gráfica (fig. 2.14):

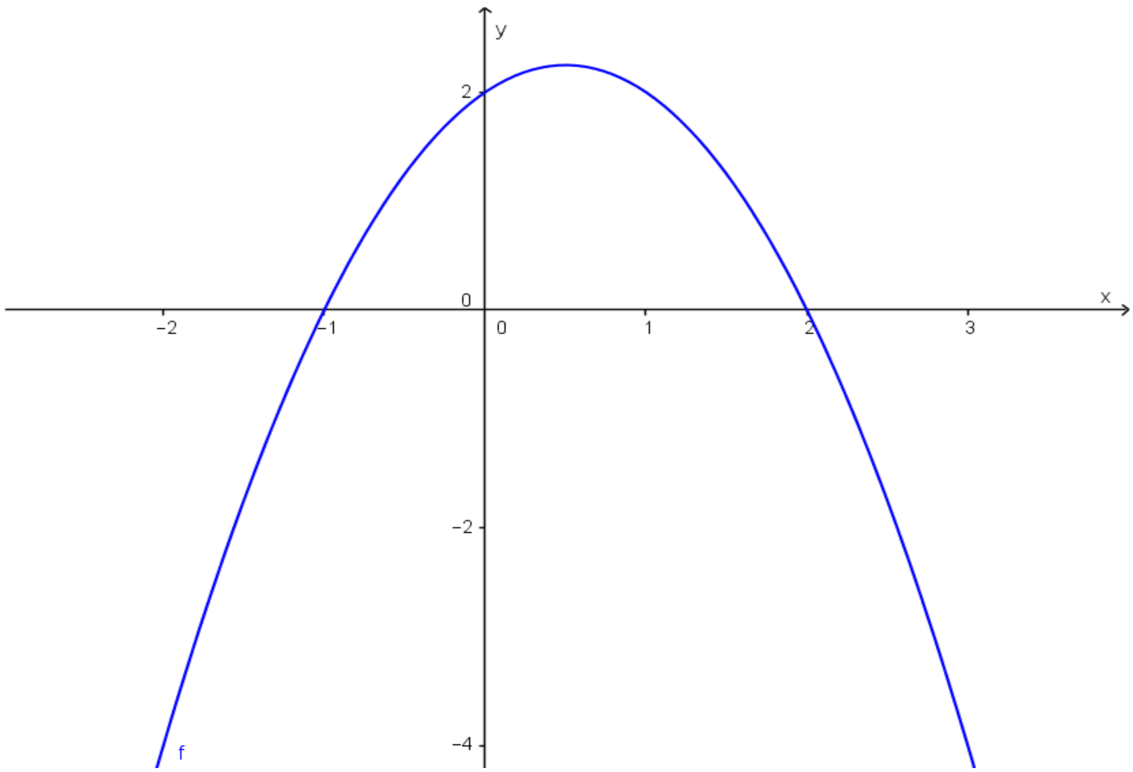


Fig. 2.14

2.4.1 Aplicaciones

Ejemplo 1:

En física: movimiento parabólico.

La altura que alcanza un balón de futbol que se lanza desde el piso, está dada por la ecuación $f(t) = 20t - 5t^2$ donde t es el tiempo en segundos y $f(t)$ la altura medida en metros,

a. ¿Qué altura alcanzará al cabo de 2s?,

b. ¿Cuál es el tiempo transcurrido cuando alcanza una altura de 15 m?

a. Sustituimos en la ecuación t=2; $f(t) = 20 * 2 - 5 * 2^2$= 20 m.

b. remplazamos f(t) por 15m $15 = 20t - 5t^2$

Entonces

$$0 = -15 + 20t - 5t^2$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos los valores de t=1s y t=3s, que son los dos tiempos en los que el balón se encuentra a una altura de 15 m.

Ejemplo 2:

En la geometría: Se desea cercar un lote rectangular con 500 m de cerca, encontrar las dimensiones si se desea que el área encerrada sea máxima.

Como es rectangular el área será largo(x) por ancho $(250 - x)$. Es decir:

$$A = (x) * (250 - x) = 250x - x^2.$$

Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo y por lo tanto el vértice

$(x, A(x))$ corresponde al punto máximo; la primera coordenada del vértice corresponde al largo del rectángulo y la segunda al área máxima

Completando el cuadrado se obtiene:

$$A = -(x - 125)^2 + 15625$$

Por lo tanto el vértice tendrá como coordenadas (125,15625)

Luego $x = 125$ (largo), ancho 250-125=125 y área máxima 15625.

Ejemplo 3:

En los negocios: La cantidad de artículos vendidos en un mes está dada por la función c=-5p+12 donde p es el precio de venta de un articulo. Sabiendo que el costo para producir un artículo es de $10, determinar el precio de venta p que produce la ganancia máxima mensual

Ganancias = ingreso de la venta – costo de producción.

$$= c * p - 10 * c$$

Luego como $c = -5p + 12$ entonces

Ganancias $=(-5p + 12)p - 10(-5p + 12)$

$$= -5p2 + 12p + 50p + 120$$

$$= -5p2 + 62p + 120$$

Como $a = -5 < 0$, la parábola abre hacia abajo y por lo tanto el vértice

(p, G) corresponde al punto máximo; la primera coordenada del vértice corresponde al precio de venta y la segunda a la ganancia máxima

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-62}{-10} = 6.2$$

Por lo tanto el precio de venta que produce la mayor ganancia es de $6.2. y la ganancia máxima es:

$$G = -5(6.2)^2 + 62(6.2) + 120 = \$312.2.$$

2.5 Función polinómica de grado 3

Son todas aquellas funciones reales que tienen la forma

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Donde $a_{3,}a_2, a_1, a_0 \in R$ con $a_3 \neq 0$. Donde a_0 es la ordenada del punto de corte con el eje y, se representa con d. a_3, a_2, a_1se representan con $a, b\ y\ c$ respectivamente

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

La representación gráfica de una función cúbica, varía de acuerdo a los valores de a, b, c, d.veamos lo que ocurre cuando varían:

Variando el parámetro a:

- a>0, considerando $b = c = d = 0$, la curva se encuentra en el primer y tercer cuadrante, ver (fig.2.15),

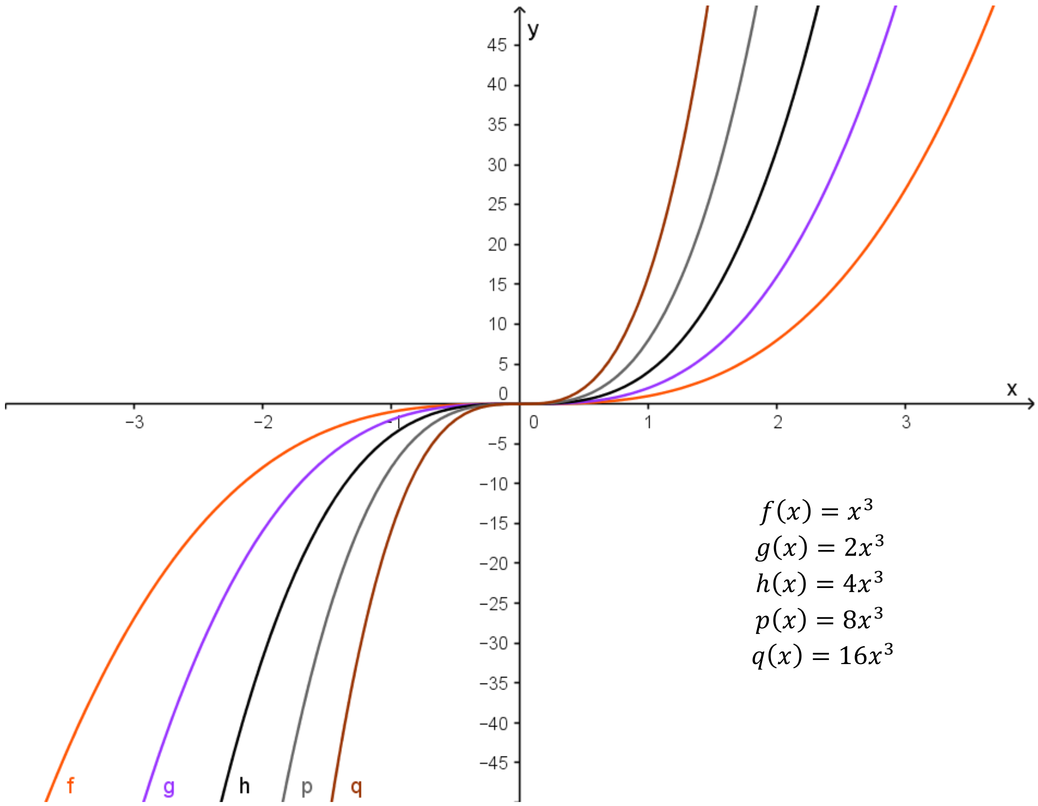


Fig. 2.15

- si a<0 considerando $b = c = d = 0$ se ubica la gráfica en el segundo y cuarto cuadrante (fig. 2.16).

En los dos casos si $|a| \geq 1$ se acerca la curva al eje de las ordenadas:

Para valores $|a| < 1$ los brazos de la gráfica se acercan a las abscisas (fig. 2.16):

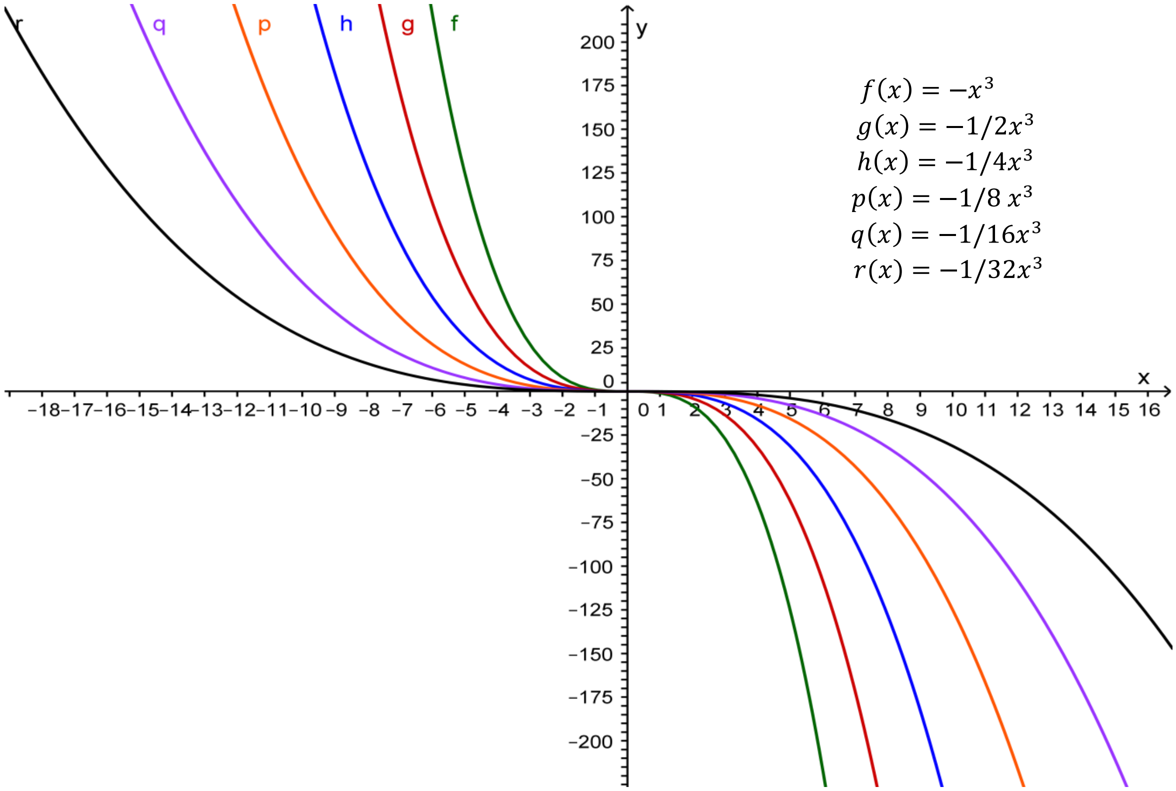


Fig. 2.16

- Ahora varía b, si b>0 tiene un máximo relativo que aumenta significativamente (fig. 2.17):

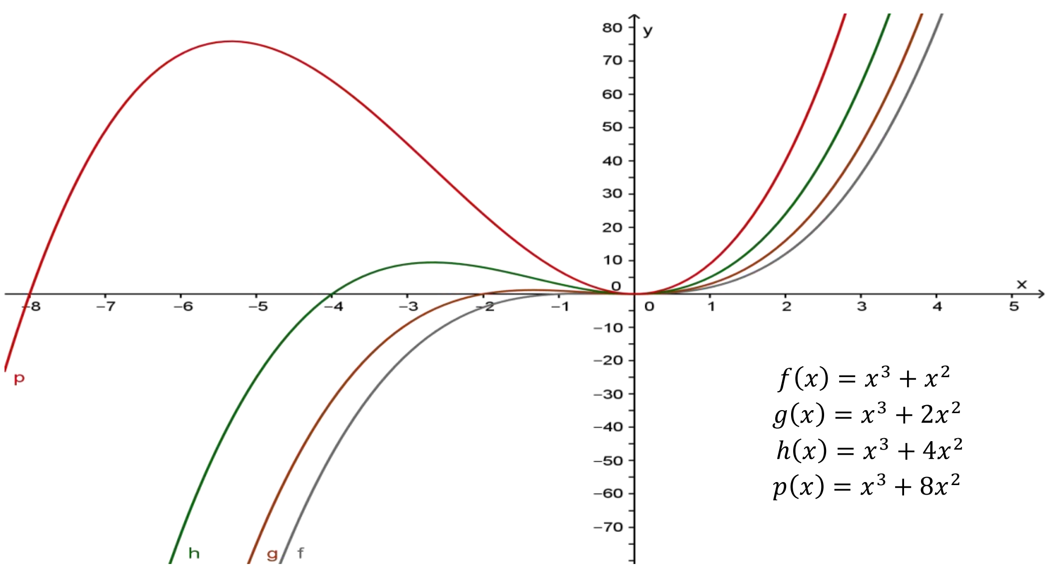


Fig. 2.17

Si b<0 ocurre lo contrario al caso anterior (fig. 2.18):

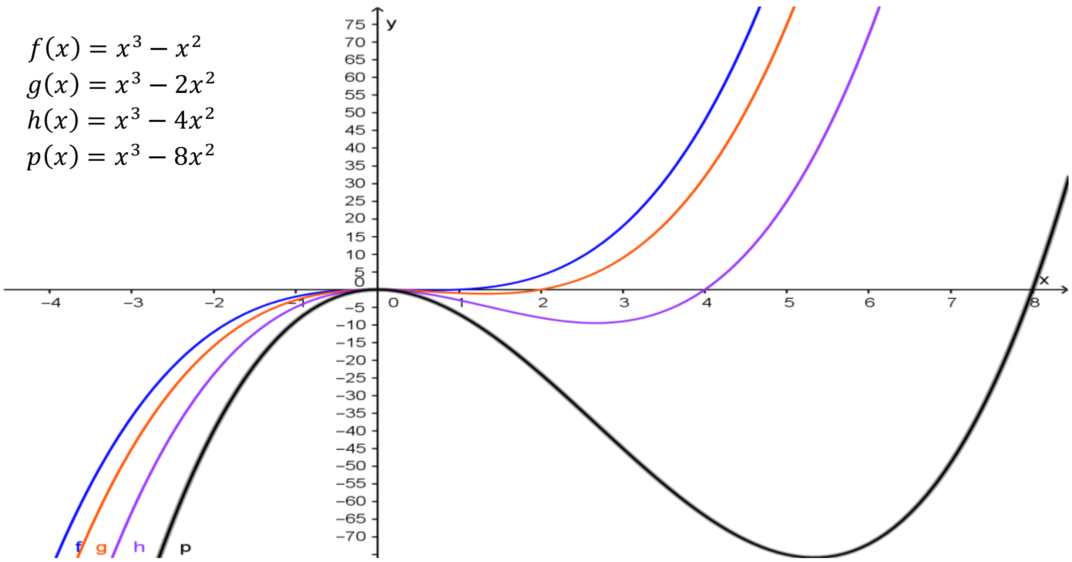


Fig. 2.18

Varia c en donde hay dos casos. Cuando c>0 las concavidades se van desvaneciendo hasta que únicamente queda un punto de inflexión, no habrá ni máximo ni mínimo relativo (fig.2.19):

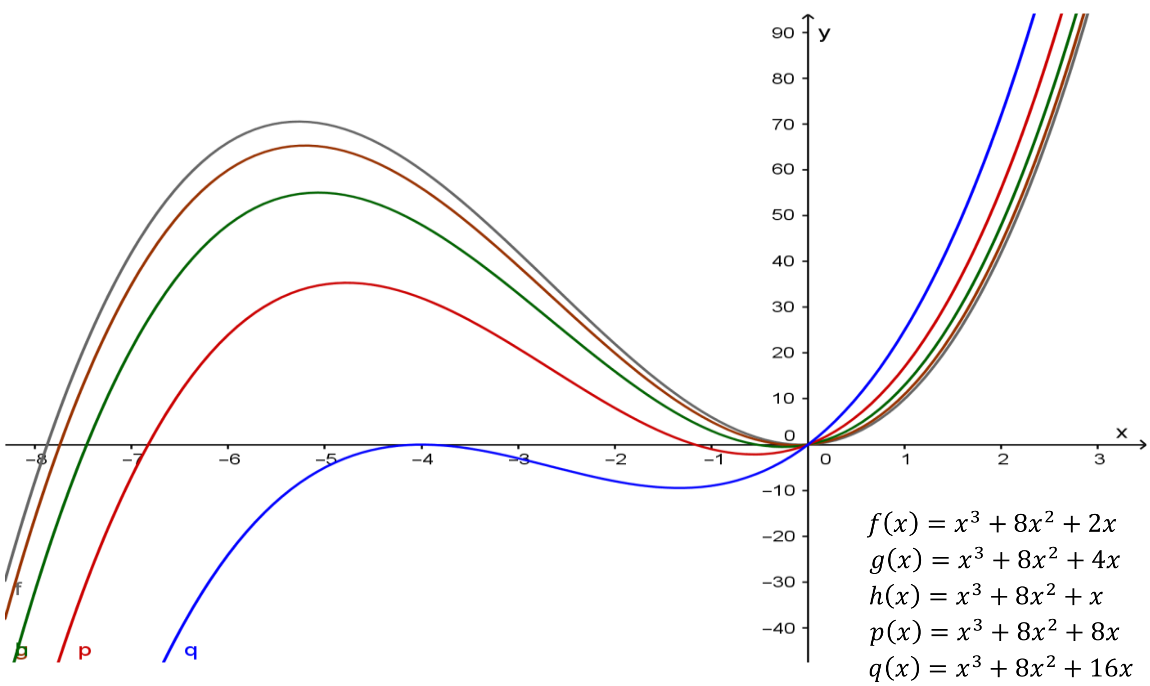


Fig. 2.19

Cuando c<0 entonces las concavidades son más notorias, los puntos críticos cambian visiblemente (ver fig. 2.20):

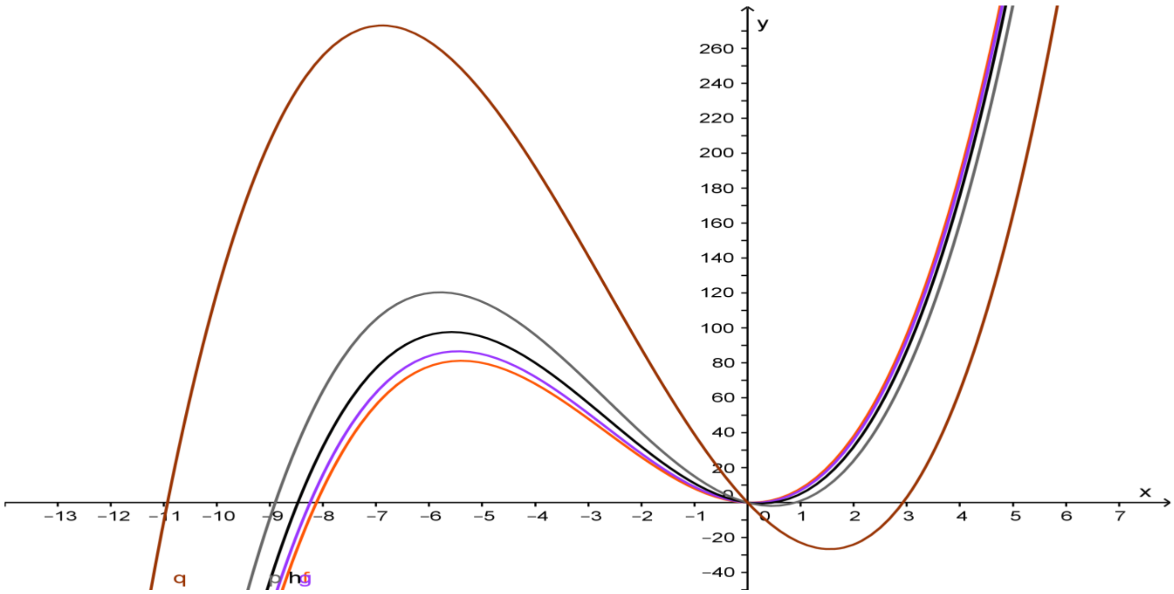


Fig. 2.20

El parámetro d hace que la grafica suba si d>0 y que baje si d<0 (fig. 2.21):

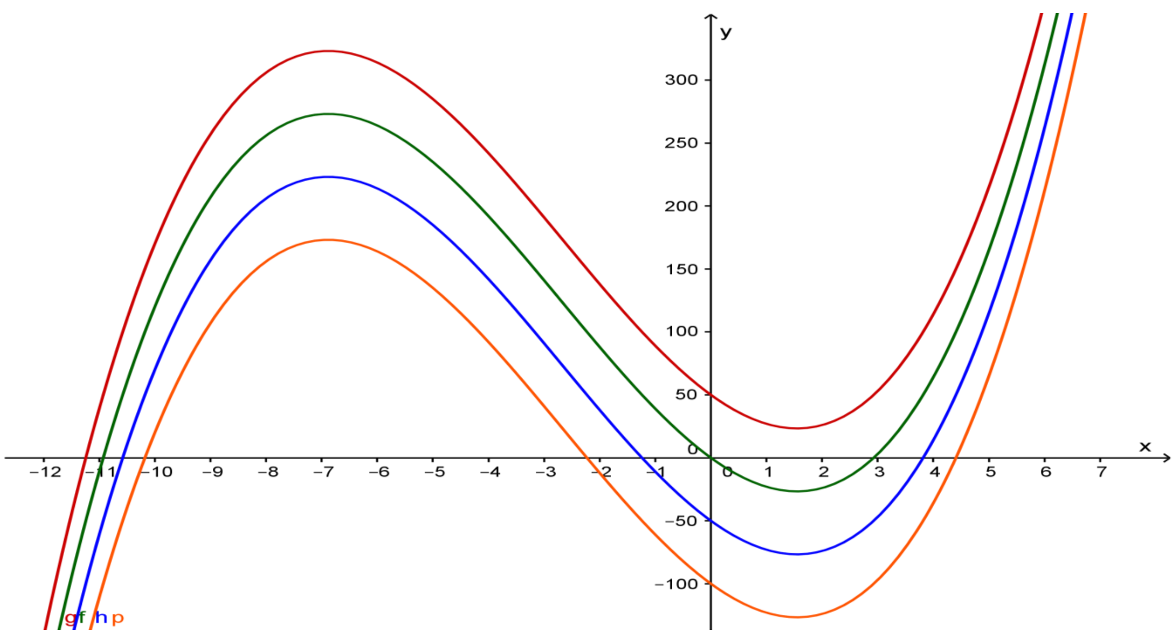


Fig. 2.21

La función cúbica únicamente presenta simetría respecto al origen cuando la función es impar, *f(-x)=-f(x),* y esto ocurre cuando $b = d = 0$, es decir $f(x) = ax^3 + cx$.

El dominio al igual que el rango de la función cúbica son los números reales.

El punto de corte con el eje Y como se observa en la fig. 19 esta dado por el valor del parámetro d de la función. Para los puntos de corte con el eje X se debe hacer que $f(x) = 0$ obteniendo la ecuación cúbica: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Cuya solución se puede hallar por factorización (si la raíces son racionales) o utilizando el método de Cardano (capitulo 1, sección 10, pág. 18) o usando un graficador y aproximando los valores de los puntos de corte de la gráfica con el eje x.

$$Z = z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$z_{2=} -\frac{z_1}{2} + \sqrt[2]{\frac{{z_1}^2}{2} + \frac{q}{z_1}}$$

$$z_{3=} -\frac{z_1}{2} - \sqrt[2]{\frac{{z_1}^2}{2} + \frac{q}{z_1}}$$

obteniendo las soluciones:

$$x_1 = z_1 - \frac{j}{3}$$

$$x_2 = z_2 - \frac{j}{3}$$

$$x_3 = z_3 - \frac{j}{3}$$

Donde

$$p = -\frac{j^2}{3} + k \quad y \quad q = \frac{2j^3}{27} - \frac{kj}{3} + l$$

Con

$$j = \frac{b}{a}, \quad k = \frac{c}{a} \quad y \quad l = \frac{d}{a}.$$

Se puede saber si existen las dos raíces complejas en la solución sabiendo si:

- $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ tiene dos soluciones complejas y una real.
- $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ tiene tres soluciones reales con mínimo dos iguales
- $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ tiene tres soluciones reales.

A modo de ejemplo analicemos la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$

- Como $a > 0$ la curva se encuentra en el primer y tercer cuadrante.
- Corta al eje Y en el punto $(0, -2)$
- Para los cortes del eje X se soluciona la ecuación $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$
  - $j = \frac{3}{2} = 1.5, \quad k = \frac{2}{2} = 1 \quad y \quad l = \frac{-2}{2} = -1$.
  - $p = -\frac{1.5^2}{3} + 1 = 0.25 \quad y \quad q = \frac{2(1.5)^3}{27} - \frac{1*1.5}{3} - 1 = -1.25$
  - $\frac{(-1.25)^2}{4} + \frac{(0.25)^3}{27} > 0$ tiene una solución real y dos complejas por lo tanto solo tiene un punto de corte con el eje X.
  - Solucionando la ecuación obtenemos $x_1 = 0.5, \quad x_2 = -1 - i \;\; y \;\; x_3$=-1+i

Por lo tanto el corte con el eje X es el punto (0.5 , 0)

Veamos la gráfica

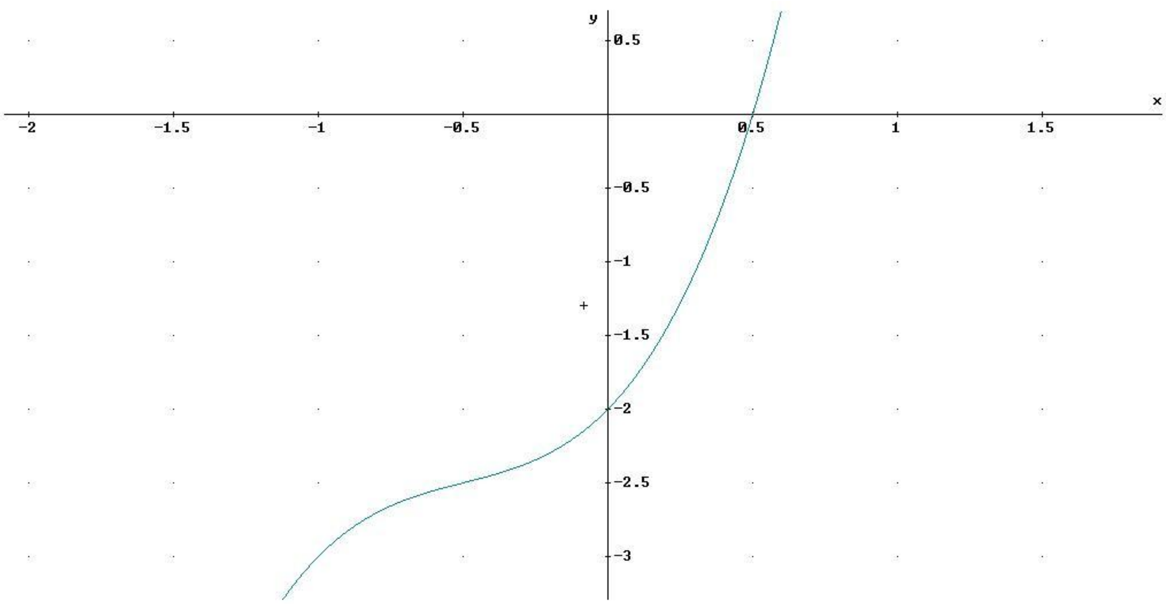


Fig. 2.22

2.5.1 Aplicaciones

Ejemplo 1:

Se tiene una tabla cuadrada de lado l y se necesita hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales de lado x, en las esquinas, doblando sus lados. ¿cuál es la longitud x que se recorta para que el volumen de la caja sea máximo?

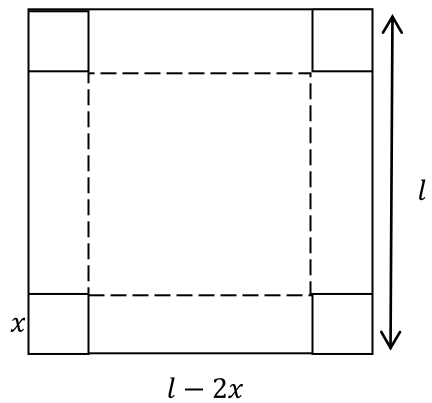


Figura 2.23

Doblando y formando la caja, está tendrá un volumen:

$$V(x) = (l - 2x)^2 x = xl^2 - 4lx^2 + 4x^3.$$

Como l y x son positivos, y para poder hacer la caja se tiene que $0 < x < {}^{l}/_{2}$.

Como es un polinomio de grado 3 tiene por lo menos una raíz real, es decir, corta al eje x al menos una vez. y se verifica que:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

Por lo tanto corta a el eje x en tres puntos (uno se repite), entonces la función tiene máximo y mínimo relativos, que para encontrarlos usamos el criterio de la primera derivada:

$$V'(x) = 12x^2 - 8lx + l^2 = 0$$

Por el teorema de las raíces racionales:

$$p = \pm 1, \pm l, \pm l^2,$$

$$q = 1,2,3,4,6,12,$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots, \pm\frac{l}{2}, \pm\frac{l}{3}, \dots., \pm l^2/6, \pm l^2/12.$$

Utilizando división sintética:

12	-8l	l^2	
	$6l$	-l^2	$l/2$
12	-2l	0	

12	-8l	l^2	
	$2l$	-l^2	$l/6$

12	-$6l$	0

Como $x = \frac{l}{2}, y\ \ x = l/6$ entonces obtenemos la factorización:

$$(2x - l)(6x - l) = 0$$

Obteniendo los puntos críticos:

$$x = \frac{l}{2}, \quad y \quad x = l/6.$$

Se utiliza el criterio de la segunda derivada

$$V''(x) = 24x - 8l$$

Remplazando por $x = l/6$

$$V''(x) = 24\left(\frac{l}{6}\right) - 8l = 4l - 8l = -4l < 0$$

Por lo tanto hay un máximo en $x = \frac{l}{6}$

Ejemplo 2:

La posición de un móvil al cabo de t segundos viene dada por:

$$f(t) = 2t^3 - 16t^2 + 38t \text{ en metros}$$

Encontrar en que instante la posición es igual a 24.

Como debemos encontrar es tiempo en el que el móvil se encuentra en la posición 24m es decir $f(t) = 24$m entonces:

$$24 = 2t^3 - 16t^2 + 38t$$

$$2t^3 - 16t^2 + 38t - 24 = 0$$

Por el teorema de las raíces racionales tenemos que:

$$p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24,$$

$$q = 1,2,$$

$$p/q = \pm1/2, \pm1, \pm3/2, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$$

Utilizando luego división sintética:

2	-16	38	-24	
	2	-14	24	1
2	-14	24	0	

2	-16	38	-24	
	8	-32	24	4
2	-8	6	0	

2	-16	38	-24	
	6	-30	24	3
2	-10	8	0	

Luego como 1, 3, 4 son raíces del polinomio, factorizamos y se obtiene:

$$(2t-6)(t-4)(t-1)=0$$

Luego tenemos los tiempos serán: $t_1=1,\quad t_2=3\quad y\quad t_3=4$ veamos la grafica de posición contra tiempo

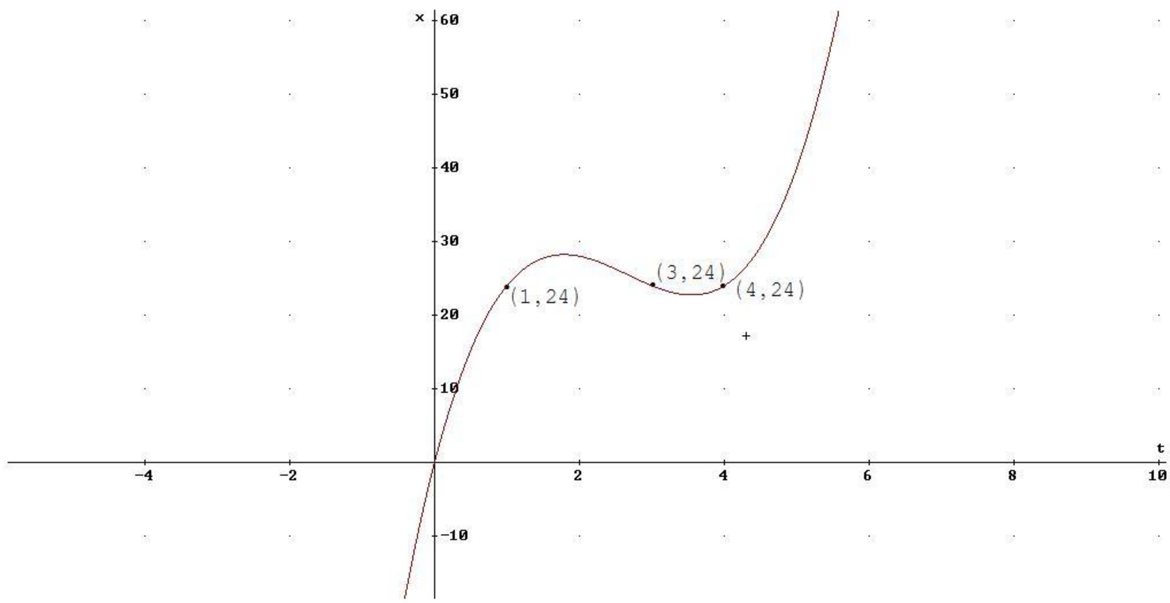


Fig. 2.24

Ejemplo 3:

Si en un zoológico se encuentran 150 leones y se sabe que al cabo de t años el número de leones $A(t)$, esta dado por:

$$A(t)=-t^3+t^2+122t+150$$

¿Cuántos leones habrá a los 4, 5, 6, 7 y 8 años?

$$A(4)=-4^3+4^2+122*4+150$$

$$A(t)=-64+16+488+150$$

$$A(t) = 590$$

$$A(5) = -5^3 + 5^2 + 122 * 5 + 150$$

$$A(t) = -125 + 25 + 610 + 150$$

$$A(t) = 660$$

$$A(6.5) = -6.5^3 + 6.5^2 + 122 * 6.5 + 150$$

$$A(t) = -274.625 + 42.25 + 793 + 150$$

$$A(t) = 710.625$$

$$A(7) = -7^3 + 7^2 + 122 * 7 + 150$$

$$A(t) = -343 + 49 + 854 + 150$$

$$A(t) = 710$$

$$A(8) = -8^3 + 8^2 + 122 * 8 + 150$$

$$A(t) = -512 + 64 + 976 + 150$$

$$A(t) = 678$$

¿A los cuántos años habrá una población de 30 leones?

Se debe encontrar t para que $A(t) = 30$, entonces:

$$30 = -t^3 + t^2 + 122t + 150$$

$$0 = -t^3 + t^2 + 122t + 120$$

Utilizando división sintética para solucionar la ecuación

-1	1	122	120	
	-12	-132	-120	12
-1	-11	-10	0	

Como las otras dos soluciones son t=-10 y t=-1, no las tomamos en cuenta ya que el tiempo no puede ser negativo, por lo tanto cuando han pasado 12 años la población será de 30 leones.

3. Desarrollo del Aula virtual

En la enseñanza tradicional el docente es el actor principal en el proceso, pero a medida que aparecen otros modelos de enseñanza y particularmente las tic's como herramienta pedagógica y didáctica, el estudiante se está haciendo más activo y con mayor participación en su proceso de aprendizaje.

Con el aula virtual, se busca plantear una estrategia que acerque al joven al mundo de las matemáticas, que encuentre una motivación al interactuar con la tecnología, tenga una alternativa diferente que le ayude a mejorar su proceso de aprendizaje, que aprenda a utilizar de una manera adecuada los recursos de los que disponen hoy en día.

En nuestro colegio el Porvenir, se adaptó el modelo de aprendizaje constructivista, en el que el docente pierde su protagonismo, para dejárselo al alumno, que ya no es la persona que recibe conocimiento, sino que participa de una forma activa en la elaboración del conocimiento, volviéndose más autónomo y participativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Con los cambios tecnológicos que se han dado en este siglo, podemos utilizarlos como herramientas que nos ayudan en el aprendizaje de las matemáticas en nuestros jóvenes de los colegios distritales. Las políticas educativas de los últimos años, apuntan a fortalecer en las instituciones educativas los recursos para un mayor aprovechamiento de las tics, "Renovación pedagógica y uso de las tic de la educación a través de la dotación de infraestructura tecnológica, el fortalecimiento de procesos pedagógicos, la formación inicial y permanente de docentes en el uso de las tic, innovación pedagógica e interacción de actores educativos" (plan decenal de educación 2006-2016), además de garantizar el acceso a la población colombiana a las tic (documento conpes 3670 de 2010).

Esto lo podemos evidenciar en las dotaciones que les hacen en los colegios para crear aulas informáticas en donde los jóvenes tengan acceso a los computadores e internet no sólo en horas de tecnología, sino que se puedan utilizar en otras áreas del saber. A algunos estudiantes de colegios Distritales en el 2014 el gobierno a través de empresas de celulares, les regalaron tablet para que puedan disponer de estas herramientas en sus casas. En cuanto a los docentes se ha venido fortaleciendo su formación en el uso de las nuevas tecnologías, certificándolos en competencias digitales.

Teniendo en cuenta que los estudiantes cuentan con los recursos tecnológicos, que el modelo que utiliza el colegio se puede adaptar al uso de herramientas tecnológicas y que las políticas educativas van encaminadas al uso de las tics, en este capítulo se describirá el proceso de elaboración del aula virtual, que tiene como fin el de ser una herramienta que mejore en los estudiantes de noveno grado, sus conocimientos, en cuanto se refiere a funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, haciendo uso de las tic.

3.1 Evaluación diagnóstica

Evaluación diagnóstica

Utilice la siguiente información para responder las preguntas 1 al 6.

En un almacén de cadena se encontró la siguiente lista de precios:

Cuaderno $3000

Libro $75000

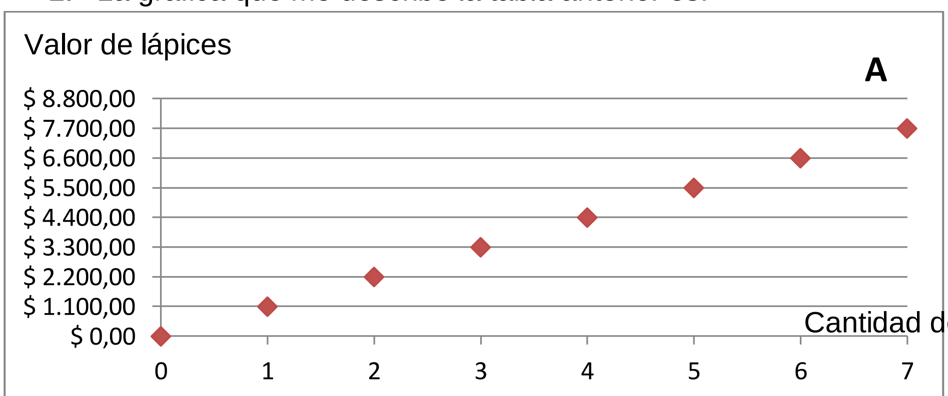
Lápiz $1100

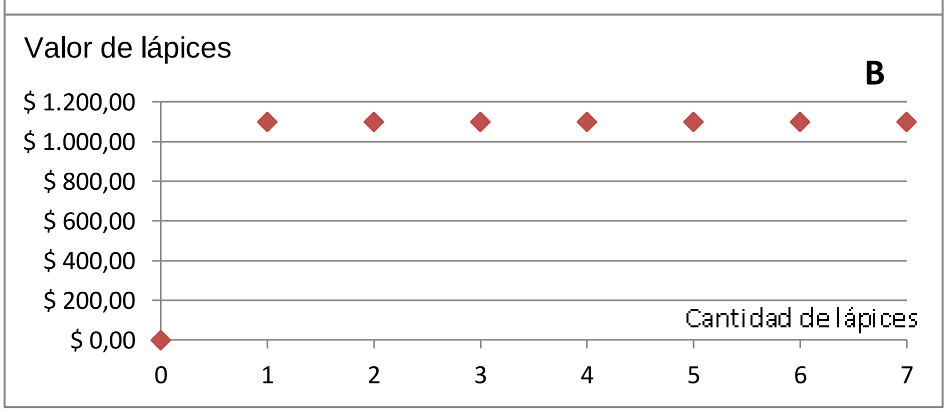
Borrador $1500

1. De acuerdo con la información anterior completar la siguiente tabla:

Cantidad de lápices	1	2	3	4	8	15		30	n
Valor	1100	2200		4400			20900		

2. La gráfica que me describe la tabla anterior es:





3. A partir de la gráfica ¿podría decir el valor de comprar 6 lápices? Escríbalo.

4. En la compra de los lápices pague $7700 ¿Cuántos lápices compre?

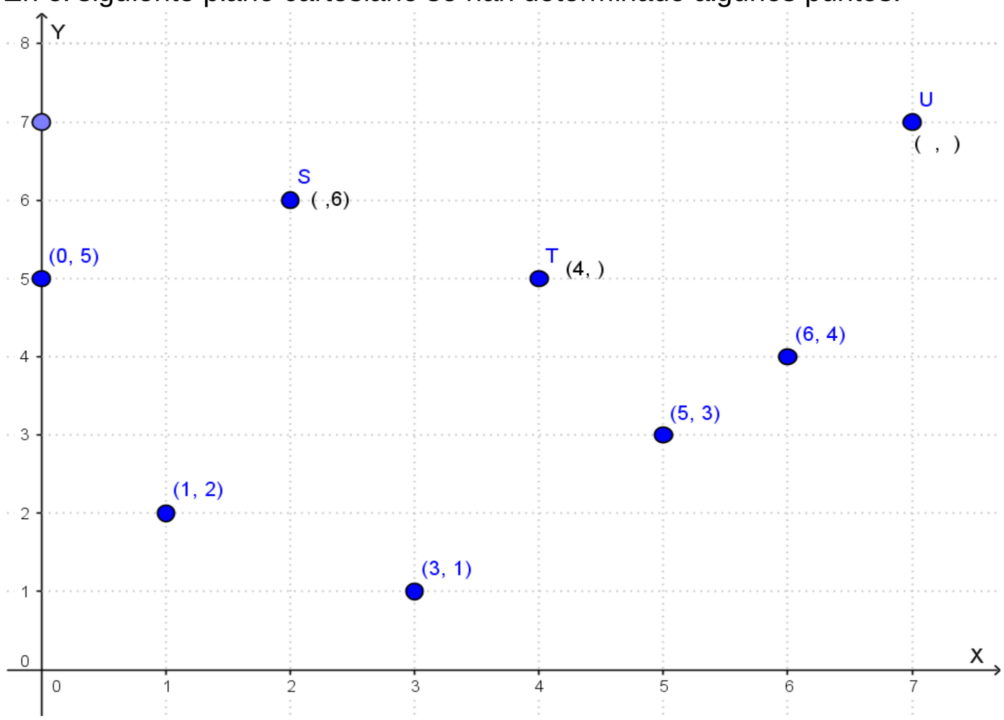
5. La igualdad que mejor me describe la relación entre precio P y cantidad de borradores B es:

   a. P=1500+B c. 1500*B
   b. P=1500+1500+1500+1500 d. 1500*P

6. Al comprar un libro me obsequiaron un bono de $1000. La igualdad que me representa la compra de cuadernos haciendo uso del bono, si Z me representa el precio de comprar X cuadernos es:

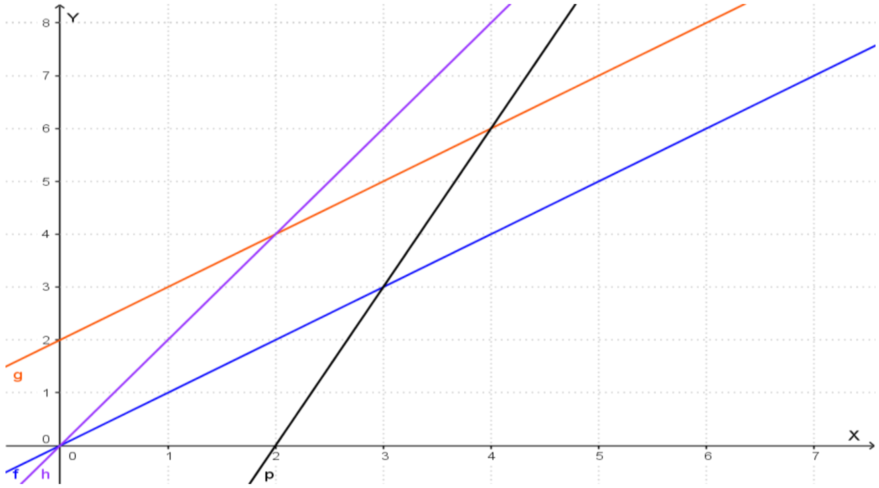
   a. Z=2000*X c. Z=3000*X-1000
   b. Z=4000*X d. Z=3000*X+1000

7. En el siguiente plano cartesiano se han determinado algunos puntos.



   a. Escriba las coordenadas del punto R.
   b. ¿Cuál es la coordenada que falta del punto S?
   c. Para el punto T escriba la coordenada que falta.
   d. Escriba las coordenadas del punto U.

En el siguiente gráfico encontrará 4 rectas diferentes, la recta azul es representada por la igualdad Y=X



8. La recta que me representa la igualdad Y=2X es:

   a. La naranja porque está 2 unidades arriba de la recta azul.
   b. La negra porque esta 2 unidades a la derecha de la recta azul.
   c. La morada porque sus valores de Y son 2 veces los valores de X.
   d. La naranja porque es paralela a la recta azul.

El primer paso que se llevo a cabo para conocer algunas dificultades de los estudiantes que ingresan a grado noveno, fue el de realizar la evaluación diagnóstica a los 50 jóvenes, que pusiera en evidencia las debilidades y/o fortalezas que tienen en lo relacionado con: plano cartesiano, coordenadas, interpretación gráfica, tabulación, las tres representaciones de una función lineal; gráfica, expresión algebraica y tabla.

En las preguntas 1 y 3, se pide que a partir de la representación (tabla o gráfica) del problema, identificar cual es el valor correspondiente a una imagen conociendo el valor de la variable, más de un 84% de los estudiantes relacionan correctamente la variable. Pero cuando se pregunto por el valor de la variable conociendo la imagen, existe una mejor interpretación en la gráfica que en la tabla por parte de los estudiantes.

Los resultados evidencian que las preguntas que involucran procesos de generalización tienen un mayor grado de dificultad, más del 50% responden equivocadamente.

En las preguntas 5 y 6 se debe identificar la expresión algebraica que relaciona correctamente las variables del problema, un 44% de los estudiantes logran identificar la expresión, aun cuando en la pregunta 6 se tiene una condición inicial.

Cuando se pregunta sobre el plano cartesiano, no sobre el problema, el estudiante presenta más dificultad que cuando se interpretaba la representación gráfica del problema, los porcentajes de encontrar coordenadas disminuyen a un 72% y a un 52% cuando no se tiene un valor numérico.

En la pregunta ocho, de opción múltiple, se evalúa sobre la relación entre, la representación de la expresión algebraica y la representación gráfica de una función lineal, más de la mitad de los jóvenes no establecen una relación entre estas dos representaciones, se presenta una confusión en un 9% de los estudiantes que no respondieron a la pregunta y solamente el 2% respondió correctamente.

3.2 Aula Virtual

Para ingresar al aula virtual digite la siguiente dirección:

http://colegioelporveniried.com/campus/

En la parte superior derecha ingresar el siguiente usuario y contraseña:

Usuario: oswaldo

Contraseña: Oswaldo_2014

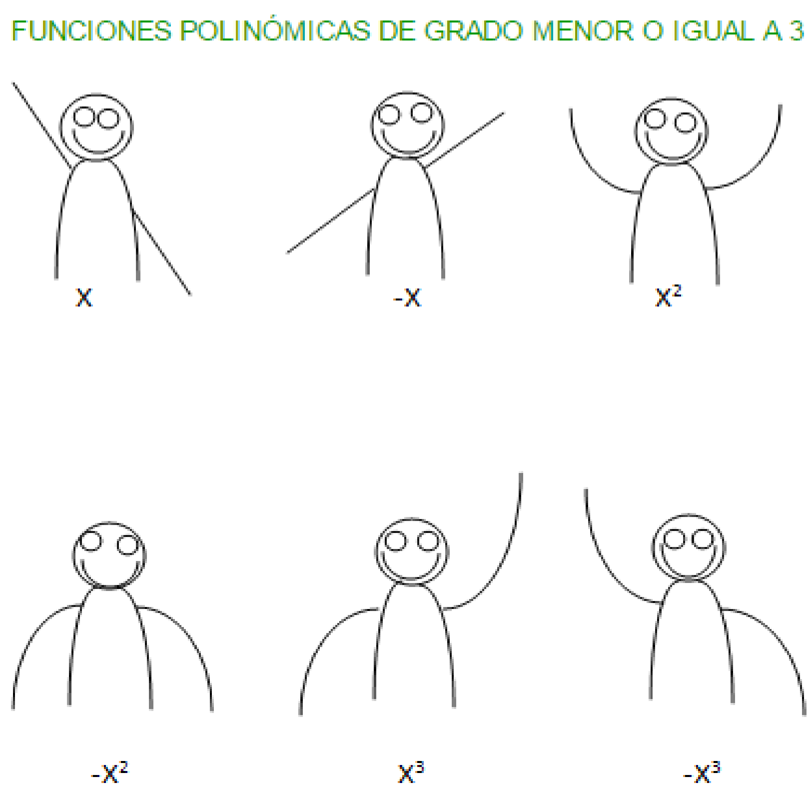
Aparecerá una pantalla igual a la siguiente donde debe dar clic en Mis cursos.

Finalmente clic en **Aula virtual de Matemáticas**

De acuerdo al análisis de resultados de la evaluación diagnóstica, se procede a la elaboración del aula virtual, como herramienta que ayude al docente y al estudiante de grado noveno en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y también ayude a superar las debilidades que traen los jóvenes y lograr una mejor interpretación de las diferentes representaciones de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres. Se escogió la plataforma Moodle, porque el Colegio El Porvenir la viene trabajando durante varios años, por lo que los estudiantes están familiarizados con su uso, además hemos tenido varios cursos de capacitación lo que nos permite usar los recursos que ésta ofrece.

La estructura del aula utiliza varios recursos: Enlazar archivos de internet, subir archivos, actividades en línea, videos, evaluación en línea con preguntas aleatorias, para que el estudiante este más motivado al tener un ambiente virtual, donde sale de la rutina del salón de clases, y tiene diferentes actividades para realizar.

Al ingresar a la plataforma el estudiante encuentra la imagen:

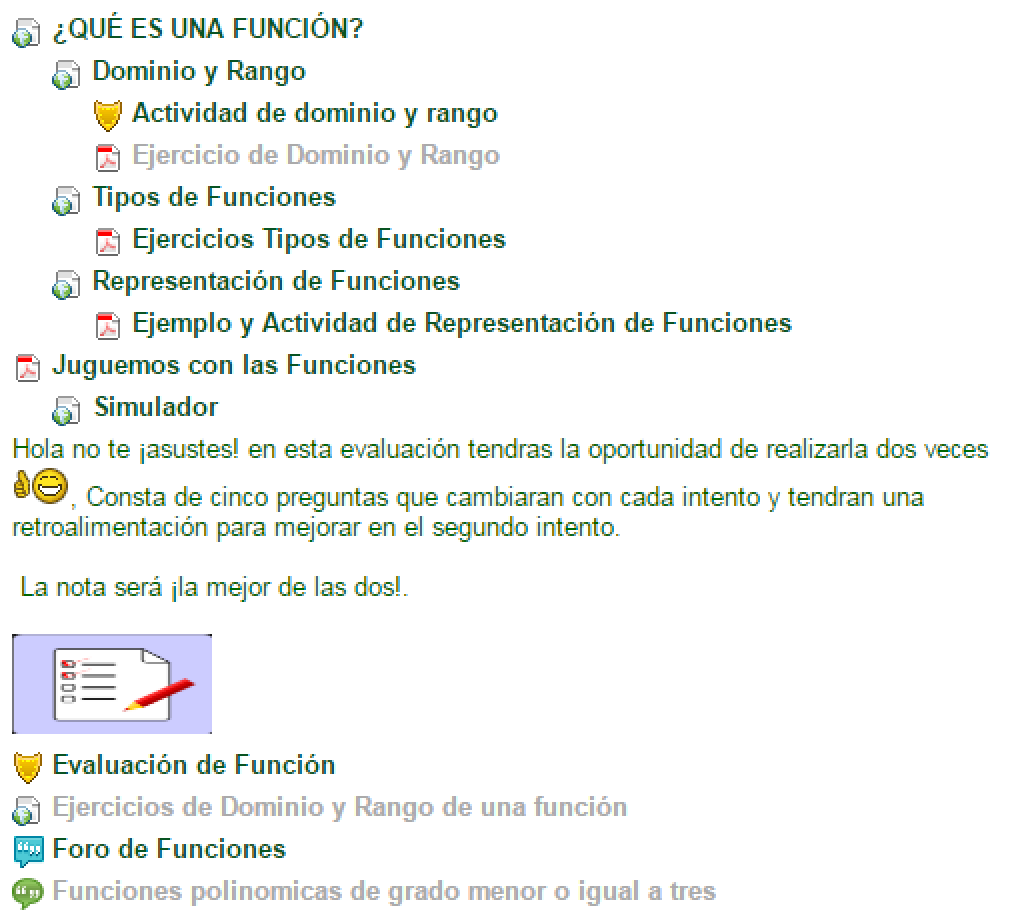


Que sirve de motivación visual para el estudio de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres.

A continuación aparecen cuatro secciones:

La primera contiene: el concepto y definición de función, dominio, rango, tipos de funciones representación de funciones, ejercicios de cada una, juguemos con las funciones, simulador y una evaluación virtual.

PRIMERA SECCIÓN



¿Qué es una función? Es una presentación en *goanimated* versión free trial, la cual se edito en video para finalmente subirlo a un blog. En la presentación se contextualiza al estudiante para luego formalizar una definición de función, usando diagrama sagital, se explica un ejemplo y se da a conocer la notación que se usara para escribir una función, la sección finaliza con unas preguntas, donde el estudiante tendrá un tiempo para pensar la solución y luego compararla con la respuesta.

Dominio y rango. Presentación en *Powtoon*, que se edita en video y se sube al blog. Con un ejercicio general, en diagrama sagital se le indica al estudiante cual es el dominio y el rango o imagen. Con un ejemplo numérico se le indica cuales son los números que forman el dominio y cuales forman el rango. Vemos importante, para que el estudiante logre ampliar el conjunto de dominio y rango, el usar el plano cartesiano. Luego trabajamos dominio y rango, con algunas funciones donde el estudiante podrá comparar sus soluciones con las que la presentación le da.

Tipos de funciones. En esta presentación a manera de galería en *emaze*, se le expone al estudiante algunos tipos de funciones, algunos ejemplos y una gráfica que ilustra cada tipo. Para el caso de las polinómicas se escribe su forma general y gráficas que ilustran las diferentes posibilidades de comportamiento de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres dependiendo de los parámetros.

Representación de funciones. Presentación en *emaze*, muestra con ejemplos las cuatro representaciones de una función que se trabajarán en el aula: verbal, algebraica, gráfica y numéricamente o tabla.

Juguemos con las funciones. Es un documento en pdf, donde se explica el funcionamiento, adecuación, y partes del simulador ubicado en la página http://www.zweigmedia.com/MundoReal/functions/func.html la cual tiene el permiso de los autores (ver anexos). En el podemos representar hasta 5 funciones al mismo tiempo, en tres representaciones: gráfica, tabla y algebraica. El estudiante deberá realizar una serie de ejercicios en el simulador, en donde podrá analizar, a partir de los cambios en los parámetros de la representación algebraica de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres, las variaciones que tiene la representación gráfica.

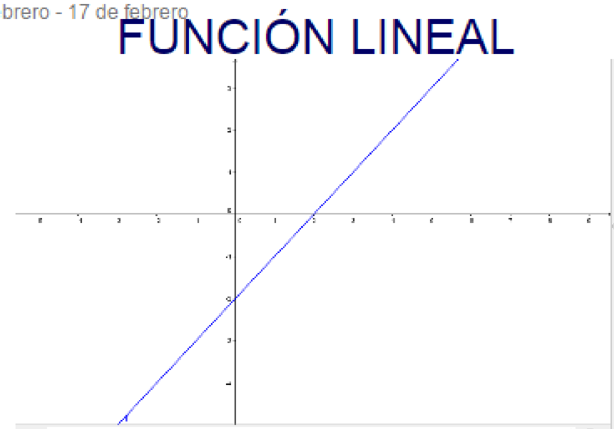
Evaluación. Es una evaluación en línea, consta de 5 preguntas de diferentes tipos: emparejamiento, opción múltiple, respuesta corta, numérica, verdadera o falsa, que cambian con cada intento del estudiante, de un banco de 25 preguntas. Donde el estudiante dispondrá de dos intentos, con un intervalo de diferencia de dos horas. En los dos intentos recibirá una retroalimentación de cada pregunta que falle. Se le valora el mejor de los dos.

Foro. Espacio donde el estudiante tendrá la opción de aclarar sus dudas con el docente, quien programara el horario del foro.

Chat. Espacio donde el estudiante tendrá la oportunidad de intercambiar ideas y conceptos con sus compañeros, disponibilidad las 24 horas.

SEGUNDA SECCIÓN

11 de febrero - 17 de febrero



Función Polinómica Grado 1

Ejemplo y Actividad de Función Lineal

Actividad Función lineal

Actividad 2 Función lineal

Función lineal

Hola no te ¡asustes! en esta evaluación tendras la oportunidad de realizarla dos veces, Consta de cinco preguntas que cambiaran con cada intento y tendran una retroalimentación para mejorar en el segundo intento.

La nota será ¡la mejor de las dos!.

Evaluación Función lineal

Función lineal

La segunda sección está dedicada al estudio de la función polinómica de grado uno o función lineal. En ella encontramos definición, formas de representarla, ejemplos, actividades, evaluación y foro.

Función polinómica de grado uno. Presentación en *emaze*, donde a partir de una situación, se define la función lineal y se muestran formas de representarla. Se clasifican de acuerdo al valor que toma la pendiente y el punto de corte con el eje y.

Ejemplo y actividad de función lineal. Con tres ejemplos, de situaciones de la vida, se ilustran diferentes representaciones de la función lineal y en los ejercicios el estudiante deberá responder algunas preguntas, de acuerdo a la representación verbal, tabla o gráfica. Debe enviar la solución al correo del aula.

Actividad función lineal. Es una actividad que el estudiante debe solucionar en línea, que consta de cinco preguntas, cuyas respuestas erradas serán retroalimentadas.

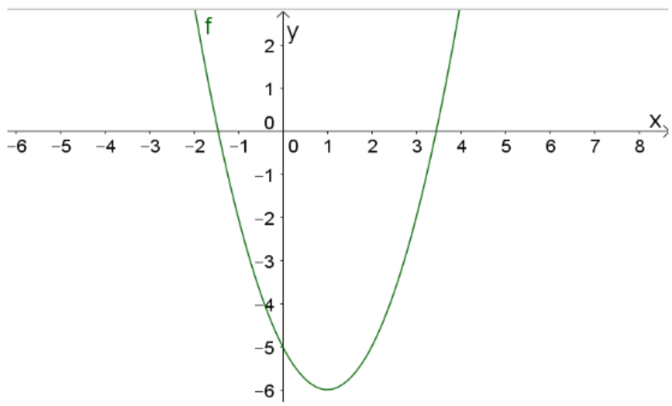
Actividad 2 función lineal. Esta actividad está dirigida al uso del simulador, donde se espera que el estudiante a partir de las gráficas que obtiene de diferentes funciones relacionadas por cambios en los parámetros m y b, escriba conclusiones y exprese sus observaciones.

Evaluación lineal. Es una evaluación en línea, consta de 5 preguntas de diferentes tipos: emparejamiento, opción múltiple, respuesta corta, numérica, verdadera o falsa, que cambian con cada intento del estudiante, de un banco de 25 preguntas. Donde el estudiante dispondrá de dos intentos, con un intervalo de diferencia de dos horas. En los dos intentos recibirá una retroalimentación de cada pregunta que falle. Se le valora el mejor de los dos..

Foro. Espacio que usa el docente para realizar aclaraciones de función lineal en un horario determinado.

TERCERA SECCIÓN

FUNCION CUADRATICA



Función Polinómica Grado 2

Aplicación función cuadrática

Actividad Función cuadrática

Actividad 2 Función Grado 2

Hola no te ¡asustes! en esta evaluación tendras la oportunidad de realizarla dos veces , Consta de cinco preguntas que cambiaran con cada intento y tendran una retroalimentación para mejorar en el segundo intento.

La nota será ¡la mejor de las dos!.

Evaluación Función cuadratica

Función cuadratica

En la tercera sección se trabaja la función polinómica de grado dos o función cuadrática, acá encontraremos: definición, formas de representarla, aplicación, actividades, evaluación y foro.

Función polinómica grado 2. Presentación en *emaze*, que comienza contextualizando al estudiante en un par de situaciones cotidianas que matemáticamente se modelan con funciones cuadráticas, para luego presentar formalmente la función cuadrática y sus representaciones. Se clasifican de acuerdo a su parámetro a e ilustramos tres casos que se pueden encontrar de acuerdo a los puntos de corte con el eje x.

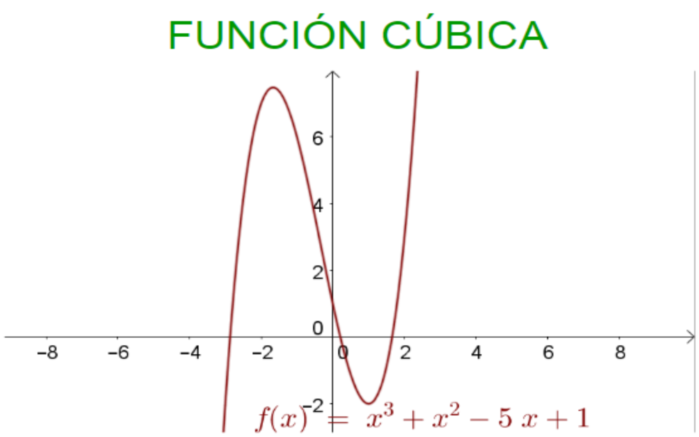
Aplicación función cuadrática. Se indaga por situaciones que el estudiante identifique con la función cuadrática, y las relacione con su representación. Debe enviar la solución al correo del aula.

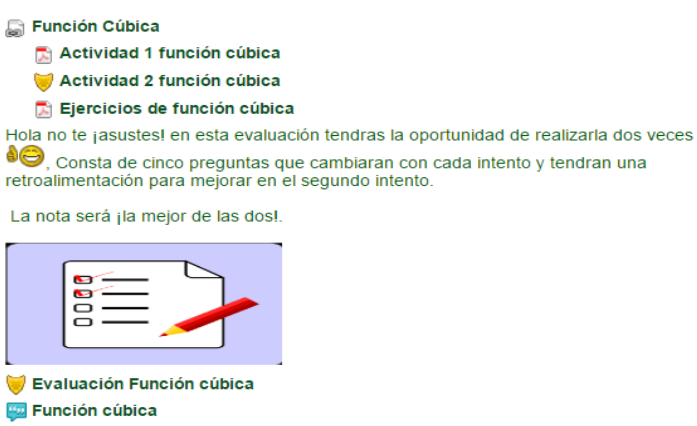
Actividad función cuadrática. Es una actividad que el estudiante debe solucionar en línea, que consta de cinco preguntas, cuyas respuestas erradas serán retroalimentadas.
Actividad 2 función grado 2. Esta actividad está dirigida al uso del simulador, donde se espera que el estudiante a partir de las gráficas que obtiene de diferentes funciones relacionadas por cambios en los parámetros a, b, c, escriba conclusiones y exprese sus observaciones.

Evaluación función cuadrática. Es una evaluación en línea, consta de 5 preguntas de diferentes tipos: emparejamiento, opción múltiple, respuesta corta, numérica, verdadera o falsa, que cambian con cada intento del estudiante, de un banco de 25 preguntas. Donde el estudiante dispondrá de dos intentos, con un intervalo de diferencia de dos horas. En los dos intentos recibirá una retroalimentación de cada pregunta que falle. Se le valora el mejor de los dos..

Foro. Espacio que usa el docente para realizar aclaraciones de función cuadrática en un horario determinado.

CUARTA SECCIÓN





En esta sección final se dedica al estudio de la función polinómica de grado tres o función cúbica. En ella encontramos: definición, representación, actividad en casa, actividad en línea, ejercicios en el simulador evaluación y foro.

Función cúbica. Presentación en una carretera usando *emaze*. Con un ejemplo motivamos la definición de función cúbica, mas adelante algunas formas que puede tomar en la representación gráfica, se sobreponen las gráficas para poder observar el cambio cuando varia uno de sus parámetros.

Actividad 1 función cúbica. Cuatro situaciones en las que para solucionarlas debe partir de la representación algebraica, el simulador le será de gran ayuda. La actividad debe enviarla al correo del aula.

Actividad 2 función cúbica. Es una actividad que el estudiante debe solucionar en línea, que consta de cinco preguntas, cuyas respuestas erradas serán retroalimentadas.

Ejercicios de función cúbica. Esta actividad está dirigida al uso del simulador, donde se espera que el estudiante a partir de las gráficas que obtiene de diferentes funciones relacionadas por cambios en los parámetros a, b, c, d, escriba conclusiones y exprese sus observaciones.

Evaluación función cúbica. Es una evaluación en línea, consta de 5 preguntas de diferentes tipos: emparejamiento, opción múltiple, respuesta corta, numérica, verdadera o falsa, que cambian con cada intento del estudiante, de un banco de 25 preguntas. Donde el estudiante dispondrá de dos intentos, con un intervalo de diferencia de dos horas. En los dos intentos recibirá una retroalimentación de cada pregunta que falle. Se le valora el mejor de los dos..

Foro. Espacio que usa el docente para realizar aclaraciones de función cúbica en un horario determinado.

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

Con la evaluación diagnóstica vimos que nuestros estudiantes llegan a noveno con dificultades en la interpretación de las diferentes representaciones de las funciones.
Causa curiosidad el hecho de saber que se elaborara un aula virtual para que ellos desarrollen trabajo extra clase.

Se espera que el estudiante se interese en desarrollar las actividades del aula virtual para que comprenda las diferentes representaciones (gráfica, tabla y expresión algebraica) de las funciones polinómicas de grado menor o igual a tres.

El aula debe ser una ayuda para solucionar las dificultades de los estudiantes en cuanto a las dificultades evidenciadas en la evaluación diagnostica, para ello recurrimos a los avances tecnológicos para apoyarnos, en algunos recursos que pueden hacer que el estudiante supere esas dificultades y logre un mejor entendimiento de las funciones de grado menor o igual a tres.

Las representaciones de las funciones se obtienen a partir de una situación problema que llevan al estudiante a establecer relaciones lineales, cuadráticas o cúbicas, facilitándoles a los jóvenes una mejor conceptualización de las relaciones entre variables. De este modo identifica las características de cada una de las funciones, haciendo que cada vez tenga menos dificultades para entender las diferentes representaciones.

Es posible que los estudiantes no distribuyan bien el tiempo para que desarrollen en los tiempos establecidos las actividades que están propuestas en el aula.
La falta de hábitos de estudio en los estudiantes puede llevar a no obtener los resultados esperados.

Otros obstáculos a los que nos enfrentamos en la actualidad, las ideas preconcebidas acerca de la matemática, su entorno social que no es muy académico, y no menos importante la motivación que tiene el estudiante para el aprendizaje de las matemáticas.

4.2 Recomendaciones

Hasta el momento no sabemos el verdadero impacto que pueda tener la propuesta, por lo cual es conveniente trabajarla a dos grupos de noveno, uno se le aplica la propuesta y al otro no. Al comienzo se puede medir con la prueba diagnóstica como llegan los dos cursos y al final una evaluación que muestre cual de los dos cursos tiene menos dificultades con el trabajo de funciones algebraicas de grado menor o igual a tres.

Complementar el aula ampliando la temática a más funciones.

Integrar otras áreas del conocimiento, para que el estudiante pueda trabajar las funciones en otros contextos y entienda que la matemática no es solo de aula sino que está presente en el diario vivir.

Anexo

Autorización Recibidos x

Oswaldo Urrego <profmatoswaldo@gmail.com> 29 abr.
para zweigmedia

Reciba un caluroso saludo.

El motivo de la presente es para saber si usted me puede autorizar a hacer uso de su simulador de la pagina http://www.zweigmedia.com/MundoReal/functions/func.html

Estoy terminando mis estudios de Magíster, mi trabajo de grado utiliza ese simulador con los estudiantes, para realizar algunas practicas.

Debido a los derechos de autor la Universidad requiere, que para poder utilizar el simulador en mi trabajo de grado, una autorización escrita del autor. ¿Me podria colaborar con esta autorización o me puede indicar que debo hacer para poder usar su simulador sin problema legal alguno?

Quedo atento a su respuesta a este correo.

Gracias.

Cordialmente

...

OSWALDO URREGO.

stefan <stefanwaner@gmail.com> 29 abr.
para mí

Hola y saludos

Gracias por la cortesía de pedir mi permiso para utilizar la página.

Esto es para confirmar que usted puede utilizar la página http://www.zweigmedia.com/MundoReal/functions/func.html para los propósitos que indicó sin ningún problema, y me alegra que le sea útil.

En general, la utilización de las páginas en http://www.zweigmedia.com para enseñanza y aprendizaje es exactamente el propósito para que fueron hechos.

Atentamente
Stefan Waner

Bibliografía

[1] APOSTOL, Tom M. CALCULUS. Editorial Reverté Colombiana S.A. Volumen 1. 1988. 813 p.

[2] AZCARATE Carmen. Funciones y Gráficas. Madrid: Editorial Síntesis. 1996, 176 p.

[3] BOYER Carl B. Historia de la matemática. Alianza Editorial. Madrid, España. 1986.

[4] Cabra M. Diana Fabiola y otros. La Función Lineal en diferentes contextos (otras Ciencias) articulo

[5] DE SUBIRÍA Julián. Los modelos pedagógicos. Colombia. Fundación Alberto Merani. 1994

[6] HITT Fernando. Visualizando la función con la pc. Grupo editorial Iberoamericano. México D.F, México 1994.

[7] HOFMANN Joseph. Historia de la matemática. Editorial Limusa. México. 2002.

[8] KLINE Morris. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Madrid: Alianza Editorial, 1992, 527p.

[9] LARSON Ron. Precálculo.7ª Edición. Editorial Reverté. México. 2008.

[10] LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O., & STEIN, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*

[11] MINISTERIO DE EDUCACION, República de Colombia. Lineamientos curriculares para matemáticas. 1998.

[12] MINISTERIO DE EDUCACION, República de Colombia. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Ciencias Naturales. 2003.

[13] PowToon, Crea videos animados y presentaciones [en línea]. Disponible en: https://www.powtoon.com/home/g/es/

[14] RUIZ Luisa. La noción de función: análisis epistemológico y didáctico, Jaén: Universidad de Jaén. 1998, p 55 – 101.

[15] SANCHEZ Carlos, VALDÉS Concepción. Las funciones un paseo por su historia. Madrid, España. Editorial Nivola. 2007.

[16] Visual Software System Ltd, amazing presentation [en línea]. Disponible https://www.emaze.com

[17] WANER Stefan, Evaluador y graficador de funciones [en línea]. Disponible en: http://www.zweigmedia.com/MundoReal/functions/func.html